الصديق جابي

أستاذ التعليم العالي بقسم
الرياضيات– جامعة سطيف

حكيم ملياني

أستاذ التعليم العالي بقسم العلوم
الاقتصادية– جامعة سطيف

تطبيقات الرياضيات في فرع الاقتصاد

تذكير بالدروس– تمارين



رقم النشر: 1.01.5235
رقم ر.د.م.ك(ISBN): 978.9961.0.1475.2
رقم الإيداع القانوني: 1856-2011

مقدمة عامة

نوجه هذا الكتاب لطلاب الاقتصاد فهو يشتمل على تلخيص للدروس، تمارين ومسائل محلولة.

يتكون هذا الكتاب من أربعة فصول تحتوي على التوابع (الدوال) ذات متغير حقيقي وذات عدة متغيرات. كما يتناول حساب المصفوفات والتكامل، نظم المعادلات الخطية.

الغرض من هذا الكتاب هو إعطاء أداة يستخدمها التقني في المستقبل، لجميع الحسابات، لهذا السبب نعطي تمارين تطبيقية للطرق العامة في مجالات متنوعة مثل الاقتصاد. نسر على طرق الحساب، والنتائج بدلا من البراهين.

نبدأ في الفصل الأول بالطبع بالتوابع (الدوال) ذات متغير حقيقي وذات عدة متغيرات التي كثيرا ما تستخدم لتمثيل الظواهر الفيزيائية: العلاقة بين درجة الحرارة، حجم السائل والضغط والجهد الكهربائي، وهناك تطبيقات أخرى من هذه مهمة جدا هو التغير في النشاط، وحساب التكلفة والإنتاج، فهي أساسية في الاقتصاد.

هناك جزء كبير مخصص لحساب مصفوفة ونظم المعادلات الخطية مع عدة مجاهيل.

يهتم الفصل الثاني بحساب مصفوفة، هناك تطبيقات وهي التكلفة الحدية والمتوسطة التي تبدو أساسية في الاقتصاد.

سندرس في الفصل الثالث نظم المعادلات الخطية لعدة المجهولة، فهو ضروري لأنه يستعمل في الاقتصاد لحساب منافع متبادلة. كما سنتناول في الفصل الرابع حساب التكاملات، لأن حساب التكامل معني في كل مكان تقريبا: في الميكانيكا لحسابات مركز الثقل، قوة العمل أو طول مجالات، في الكهرباء للحسابات من أعباء الكهرباء، في الاقتصاد لحساب التكلفة الحدية والمتوسطة. وفي هذا الفصل الأخير، سنتكلم بسرعة كاملة.

الفصل الأول

التوابع ذات متغير حقيقي

مقدمة: تستخدم الدوال لتمثيل الظواهر الفيزيائية: العلاقة بين درجة الحرارة، حجم السائل والضغط والجهد الكهربائي وغيرها. تطبيقات أخرى هامة لهذه الدوال هي التغير من الأعباء، حساب لتكلفة والإنتاج التي تعتبر أساسية في الاقتصاد. هذه الدوال قد تنشأ في إعطاء تغيير عدد من القيم لمتغير الدالة.

أ) الدوال العددية ذات متغير حقيقي:

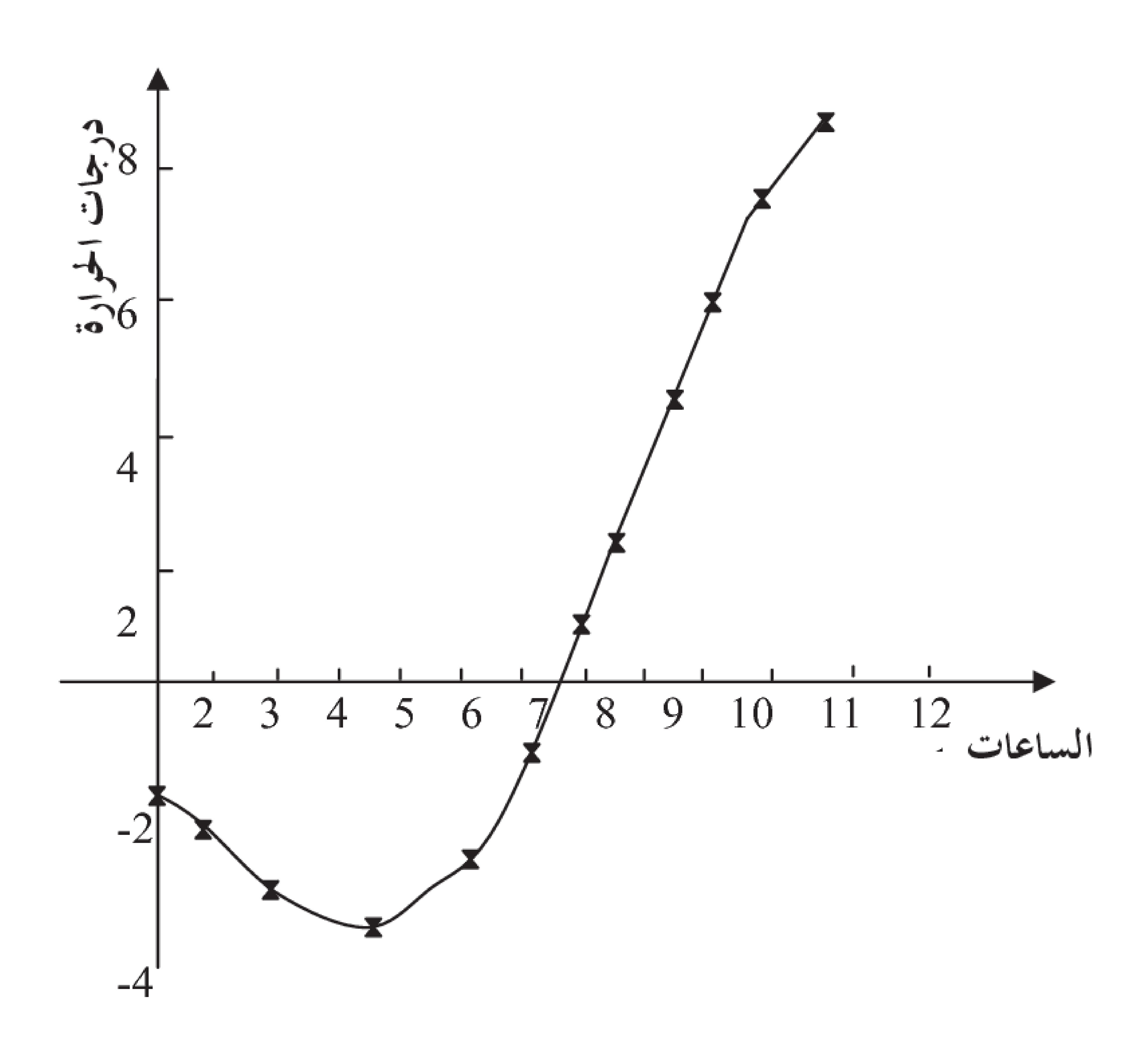
التمثيل البياني: يسمح مباشرة لقراءة التغيرات

التطبيقات: التمثيل البياني

المثال I-1 (درجة الحرارة) باستخدام الجدول التالي، مثل تغيرات درجة الحرارة اليومية:

الساعة	درجة الحرارة	الساعة	درجة الحرارة
0	-2°	7	0،5°
1	-3°	8	1،5°
2	-3،5°	9	4°
3	-4°	10	5°
4	-3°	11	7°
5	-2،5°	12	8°
6	-1°		

نرسم محورين وندرج المحور y'oy بدرجة الحرارة و x'ox بالساعات ثم نضع نقطة في كل مرة ومن ثم نربط نقاط لرصد التغيرات. خلال الشكل 1 أدناه:



الشكل 1

مفهوم الدالة:

في المثال السابق، يمكن القول أن درجة الحرارة تختلف مع مرور الوقت.

تطبيقات الدوال في الاقتصاد:

المثال الأول 2 (الاقتصاد التطبيقي): التكاليف المتغيرة أو التنفيذية:

ويبين الجدول التالي التغيرات في التكاليف اعتمادا على تغيرات نشاط في ورشة منتوجات.

الدراسة لتكاليف مختلف مستويات النشاط تبين ما يلي:

	مستويات الأنشطة						
	4000	5000	6000	8000	10000	12000	14000
المواد	16000	20000	24000	32000	40000	48000	56000
اليد العاملة المباشرة	20000	25000	30000	40000	50000	60000	70000
الإهتلاك	30000	30000	30000	50000	50000	70000	70000
مصاريف مختلفة	8000	8500	9000	14000	15000	20000	21000
التكلفة الكلية	74000	83500	93000	130000	155000	198000	217000

النظر في إنتاج أقل من 8000 وحدة. ويبدو:

إن بعض الأعباء المتغيرة: الاستهلاك من المواد واليد العاملة المباشرة تتغير نسبة لنشاط الورشة .

نتحدث عن أعباء متغيرة أو التنفيذية لأنهم مرتبطون مع حجم مستوى النشاط.

إن بعض الأعباء الثابتة: الاهتلاك في هذا المثال، لا تختلف عن مستويات النشاط إلى أقل من 8000.

نتحدث عن الأعباء الثابتة أو الهيكلية، لأنها تتعلق بهيكل معين؛

هذا وتختلف أعباء أخرى ولكن يبدو أنها تتغير دون أن تكون نسبية لمستويات النشاط فإنها في الواقع مزيج من التكاليف الثابتة والمتغيرة. نتحدث إذا عن الأعباء شبه المتغيرة.

في الواقع الأعباء ليست ثابتة دائما أو نسبية، ولكن هذا التبسيط ضروري في بناء النماذج.

I. 2 الدوال من النوع: y = a.x + b

أ) الرسم التطبيقي:

علما أن المنحنى البياني عبارة عن مستقيم، يكفي تعيين نقطتان لرسمه، نختار النقطتان:

$$x = 0 \rightarrow y = b;\ A\ (0 ،b)$$

$$y = 0 \rightarrow x = -\ b/a;\ B\ (-\ b/a ،0).$$

b تسمى الترتيب.

I. 3 التفسيرات الاقتصادية للدوال من النوع y = a.x + b:

في الاقتصاد، فيمكن أن تمثل هذه الدوال الأعباء شبة المتغيرة أو الأعباء الكلية.

المثال الأول. 3 (التطبيق في الاقتصاد): إننا سوف ندرس البيانات المحاسبية لتحديد العلاقة التي توجد بين الأعباء لفترة معينة ومستويات الأنشطة.

ولنفترض أن في أحد المصانع بيان أعباء الصيانة والإنتاج خلال 12 شهرا هي على النحو التالي:

الشهر	الإنتاج	الصيانة
جانفي	38000 دج	128000 دج
فبراير	42000 دج	132000 دج
مارس	42000 دج	132000 دج
أبريل	35000 دج	125000 دج
مايو	48000 دج	138000 دج
يونيو	50000 دج	140000 دج
يوليو	50000 دج	140000 دج
أغسطس	28000 دج	118000 دج
سبتمبر	30000 دج	120000 دج
أكتوبر	52000 دج	142000 دج
نوفمبر	53000 دج	143000 دج
ديسمبر	52000 دج	142000 دج
المجموع السنوي	520 000 دج	1600 000 دج

الرمز دج: (**دينار جزائري**)

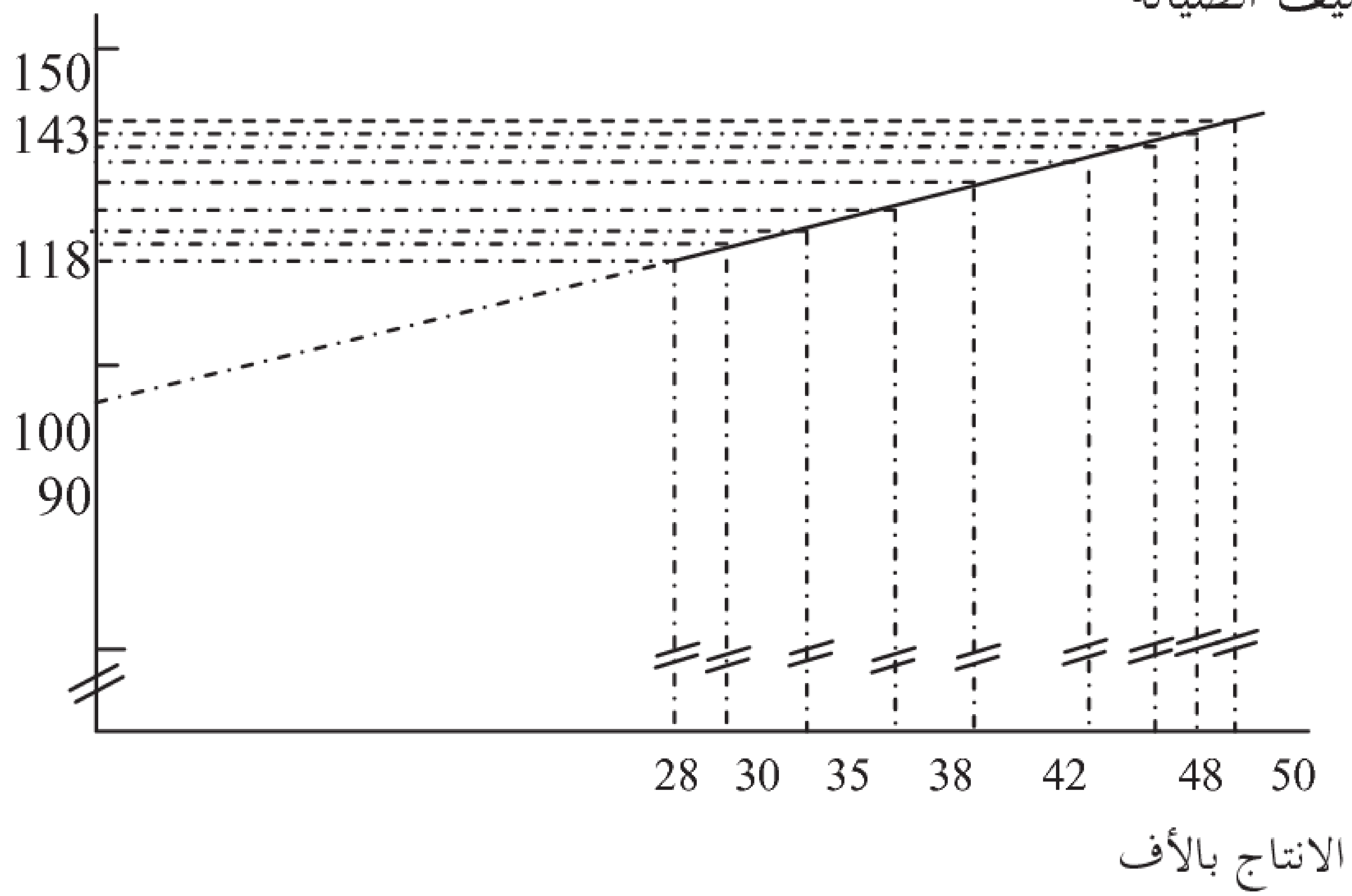
الطريقة البيانية: نكون الرسم البياني الذي يحمل:

- في محور x'ox أرقام الإنتاج.
- وفي محور y'oy مبالغ تكاليف الصيانة.

الخط المستقيم الانضمام إلى نقطتين تم الحصول عليها هو تغيير في أعباء الصيانة بدلالة الإنتاج.

إن تمديد الخط المستقيم يقطع في الواقع حجم أعباء y'oy
في A.(0،b) التي تمثل تغيرات أعباء الصيانة على أساس الإنتاج.

نجد قيمة 90.000 دينار جزائري ل A والمنحدر من الخط ويظهر زيادة في التكاليف المتصل لزيادة الإنتاج، وهي: 20،000 دج الى 20،000 وحدات تكاليف الصيانة



الشكل 2: أعباء الصيانة الغير مباشرة

قسم أعباء صيانة الوحدة للإنتاج يساوي:

1 دج = 20 000 دجَ 20 000

2) الحالات الخاصة:

b = 0 الدالة تصبح y = a.x، منحناها البياني هو عبارة عن مستقيم يمر بالمبدأ.
a=0، الدالة تصبح y = b، منحناها البياني هو عبارة عن مستقيم موازي لمحور الفواصل.
y=0 الدالة تصبح x = - b/a، منحانها البياني هو عبارة عن مستقيم موازي لمحور التراتيب.

تطبيقات الاقتصاد للدوال $y = a.x$ و $y = b$:

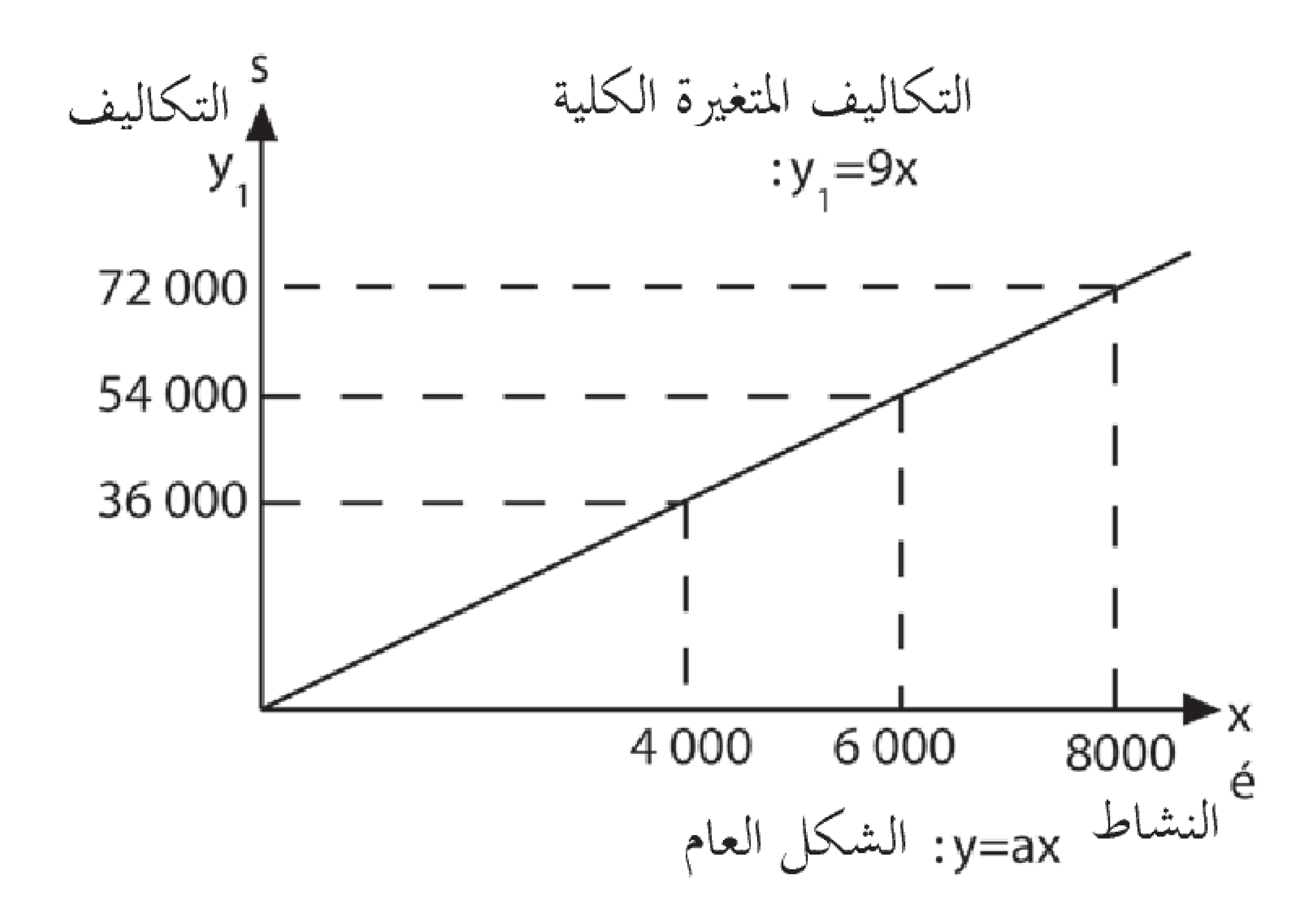
b = 0 الدالة تصبح $y = a.x$ وحقه ممثل التكاليف المتغيرة.

المثال الأول. 4 (من التكاليف المتغيرة): ولنتأمل في المثال الأول.2، مجموع المواد واليد العاملة المباشرة.

لدينا:

x......... مستويات النشاط	4000	5000	6000	8000
y.......... التكاليف المتغير	36000	45000	54000	72000

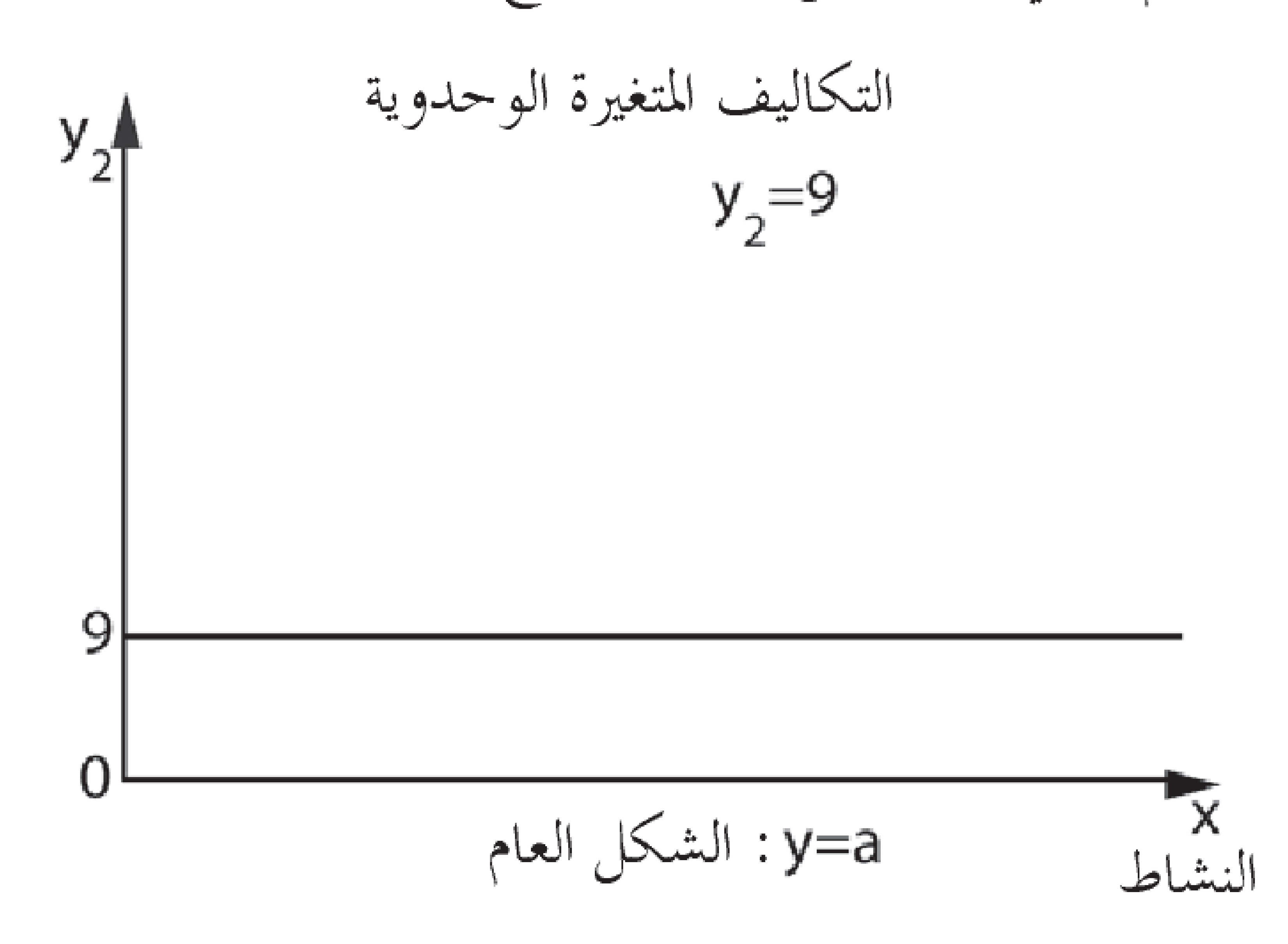
ومن ثم فإن المعادلة والرسم البياني أدناه (على افتراض نموذج صالحة من 0 إلى 8000 وحدة)



الشكل 3

a=0، ا لدالة تصبح $y = b$ وحقها يمثل أعباء ثابتة.

مثال 5. I (على أعباء ثابتة): ولنتأمل في المثال أعلاه، الاستهلاك نراه ثابت ومن ثم المعادلة والرسم البياني أدناه (على افتراض نموذج صالحة من 0 إلى 8000 وحدة).



الشكل 4

ملاحظة الأول. 1 (الأعباء شبه متغيرة):

المثال الأول. 6: ولنتأمل، في المثال أعلاه، وغيرها من الأعباء.

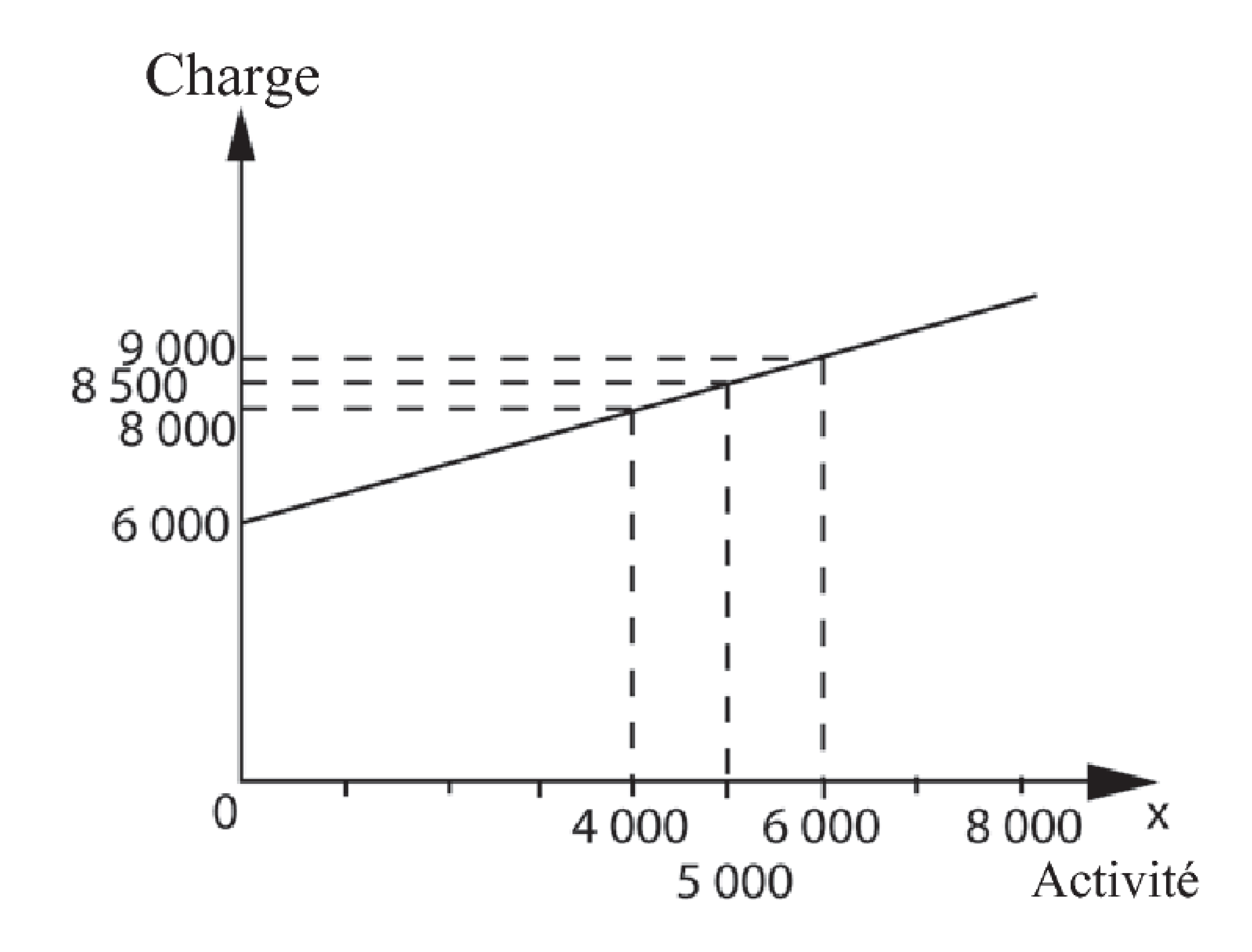
التمثيل البياني للتغيرات يبين أنه يتناول دالة $y = a.x + b$ من النوع وبالفعل، فإن ثلاث نقاط لممثل:

$x = 6000$، $x = 5000$، $x = 4000$ هي على استقامة واحدة.

البحث عن المعادلة:

$$9000 = 6000.a + b$$
$$8000 = 4000.a + b$$
$$\mathbf{1000 = 2000.a}$$
$$\mathbf{a = 0.5 \; ; \; b = 6000.}$$

وبالتالي: $\mathbf{y = 0.5\,x + 6000}$



وأخيرا، نستطيع تقسيم هذه الأعباء شبه متغيرة إلى أعباء ثابتة قيمتها 6000 دينار جزائري وأعباء متغيرة من 0.5 دج لكل وحدة.

4.I التوابع من الشكل: $y=\frac{a}{\chi}$

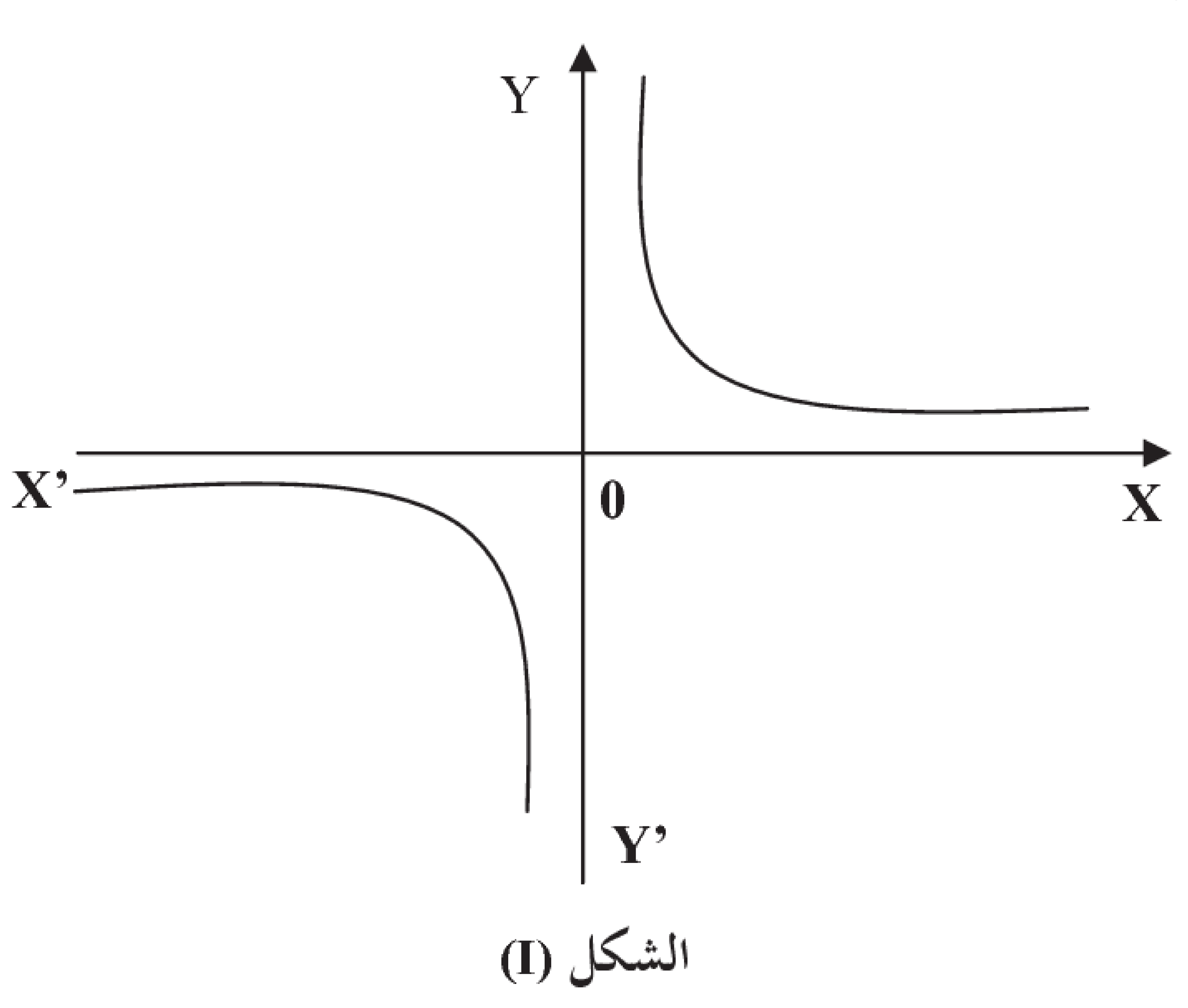
ملاحظات:

الرسم البياني مستمرا ماعدا عند الصفر الذي يعدم المقام.

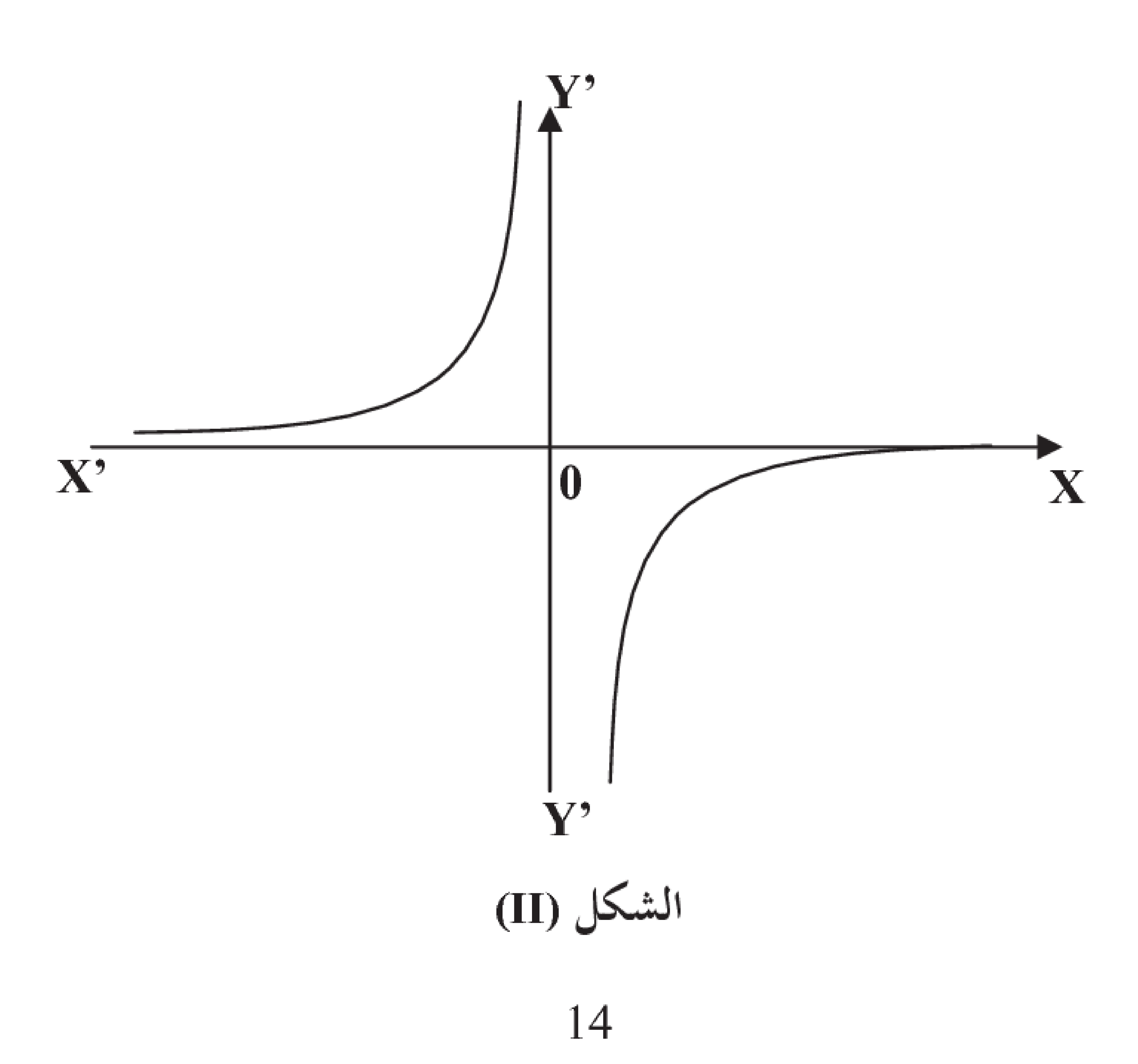
$y=\frac{a}{\chi}$ يؤدي إلى y و x :

- من إشارة مختلفة في حالة a سالب ونفس الإشارة في حالة a موجب.
- $x\to0$، $y\to\infty$ و$y\to0$ ،وبالتالي الخطوط المقاربة هي من تتبع منحنى 0X وOy.

لذلك، حيث هي إيجابية أو سلبية، من منحنى على شكل (الأول) أو (الثاني):



الشكل (I)



الشكل (II)

5. I التفسيرات الاقتصادية للدوال من النوع: $y=\frac{a}{\chi}$

المثال الأول. 7 (وحدة من التكليف الثابت): ولنتأمل على سبيل المثال الأول. 4، الإهتلاك

مستويات النشاط.........x	4000	5000	6000	8000
التكاليف الثابتة.......... y	30000	30000	30000	30000

نرى أنها ثابتة، وبالتالي المعادلة والرسم البياني أدناه (على افتراض أن نموذج صالحة من 0 إلى 8000 وحدة).

وحدة التكليف الثابت ممثلة بفرع من غلو X=0، y=0 الخطوط المقاربة:

المثال الأول. 8 (التكلفة المتوسطة): ولنتأمل المثال التالي:

	مستويات النشاط	**مستويات النشاط**	**مستويات النشاط**
البيان	4000	5000	6000
الأعباء الثابتة	36000	36000	36000
الأعباء المتغيرة	38000	47000	57000
التكلفة الكلية	74000	83500	93000

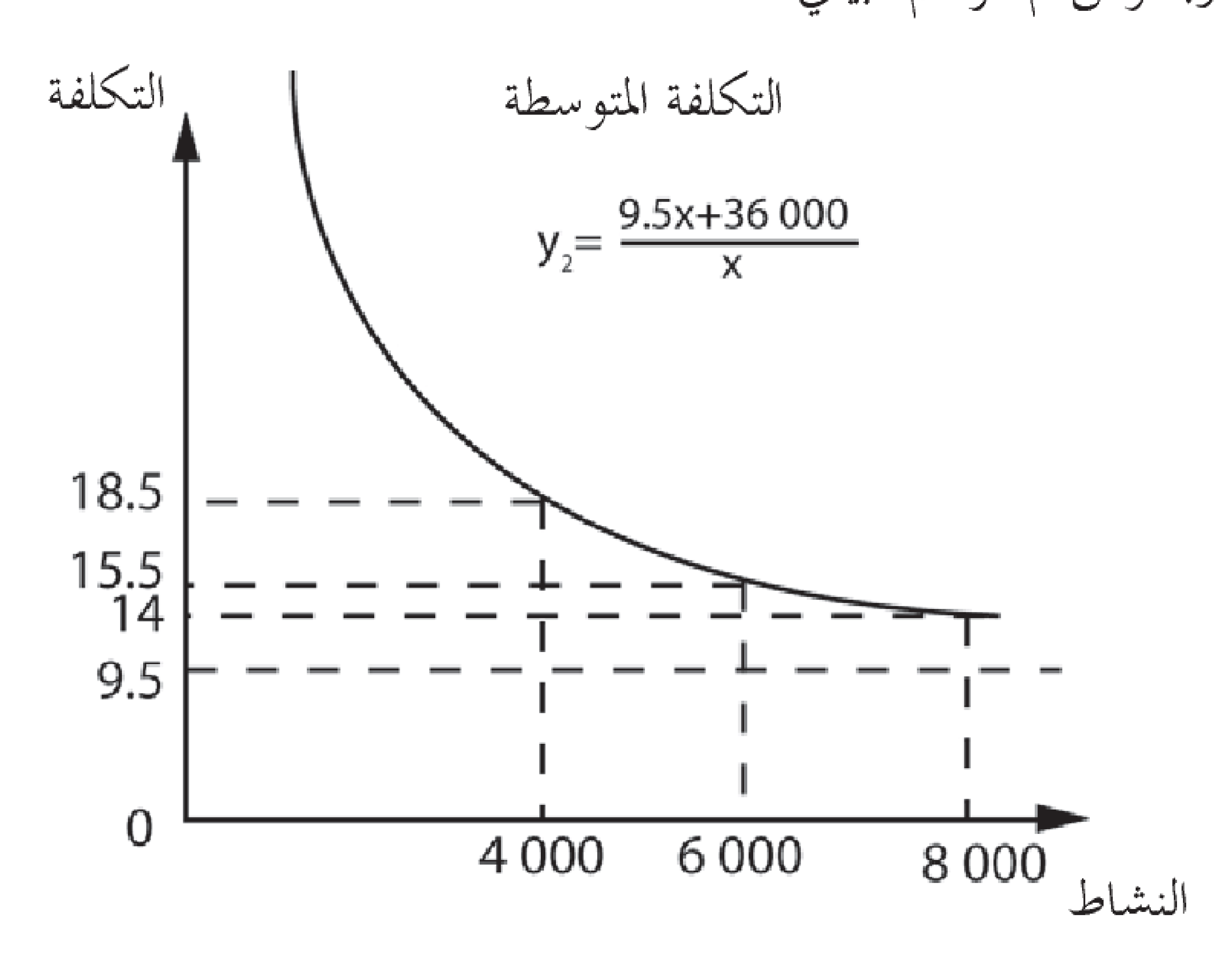
لدينا:

وحدة الأعباء المتغيرة: 4000/38000 =5000/47500 =6000/57000 = 9.5

(التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة) الإجمالية **y = a.x + b** وتبلغ الشكل العام لمتوسط التكلفة هي:

$$y = ((a.x + b)/x)) = (a + b/x)$$

ويبلغ متوسط التكلفة التي يمثلها فرع من غلو y= 9.5 وX=0 الخطوط المقاربة ومن ثم الرسم البياني أدناه:



الشكل 6: التلكفة المتوسطة

بعض الأمثلة من الأعباء شبه متغيرة:

المثال الأول. 9 (فاتورة الكهرباء لسونلغاز)

العبء المتغير هو استهلاك الطاقة، والعبء الثابت يتمثل في الرسم الثابت الموجود في فاتورة سونالغاز.

المثال الأول. 10 (فاتورة الهاتف الخاص بمؤسسة اتصالات الجزائر):

الجزء المتغير يتمثل في استهلاك المكالمات الهاتفية والجزء الثابت يتمثل في الاشتراك والموجود في الفاتورة.

المثال الأول. 11: (الراتب الأساسي + منحة):

الجزء الثابت يتمثل في الراتب الأساسي والجزء المتغير يتمثل في مختلف المكافآت، المنح والتعويضات.

تطبيقات لدراسة الدوال: الحل البياني:

أ) **حل المعادلة بيانيا:**

هي حل معادلة $f(x) = 0$ وهذا راجع إلى تمثيل بيانيا والنظر في نقطة أو نقاط حيث وتقع هذه النقاط، حيثما وجدت، على محور الفواصل.

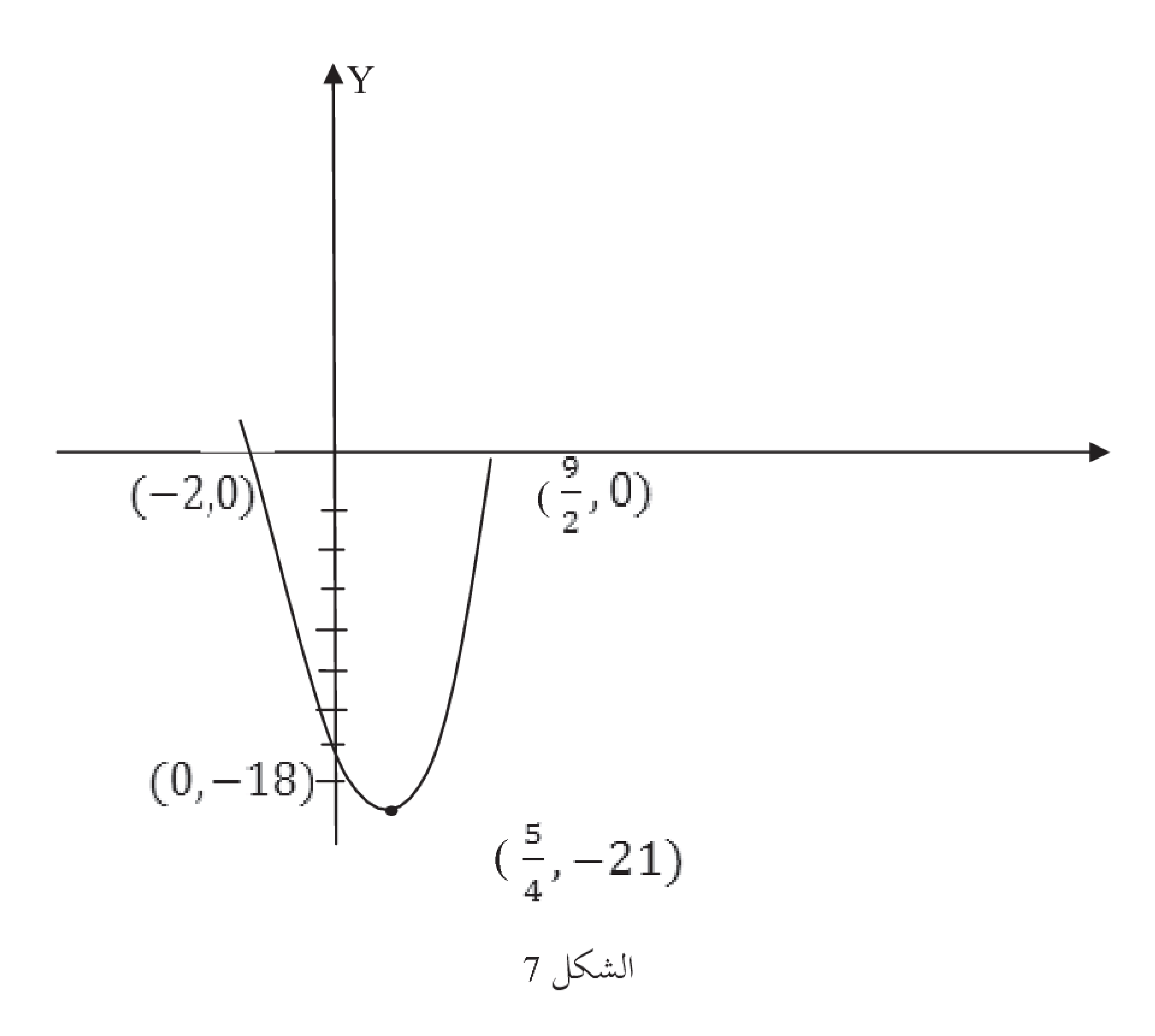
المثال الأول. 12:

حل المعادلة بيانيا: $2x^2 - 5x - 18 = 0$

يمثل الرسم البياني من المعادلة المقترحة، هو عبارة عن قطع مكافئ $y = -2x^2 - 5x - 18$ للقمة(5 / 4، -21) (انظر الشكل 7).

وبالتالي الحلول هي:

$x2 = -2$ و$x1 = (9/2)$ التي هي جذور المعادلة المقترحة.



الشكل 7

ب) بيانيا حل نظام المعادلات:

هما المعادلات: $g(x) = 0$ و $f(x) = 0$

لحل هذه العودة لنظام الكتابة $f(x) = g(x) = 0$

ومن الممكن لتمثيل منحنيات $Y2 = g(x)$ و $Y1 = f(x)$

والنظر في نقاط منحنيات حيث توجد، بالطبع $Y1 = Y2$.

المثال الأول. 13:

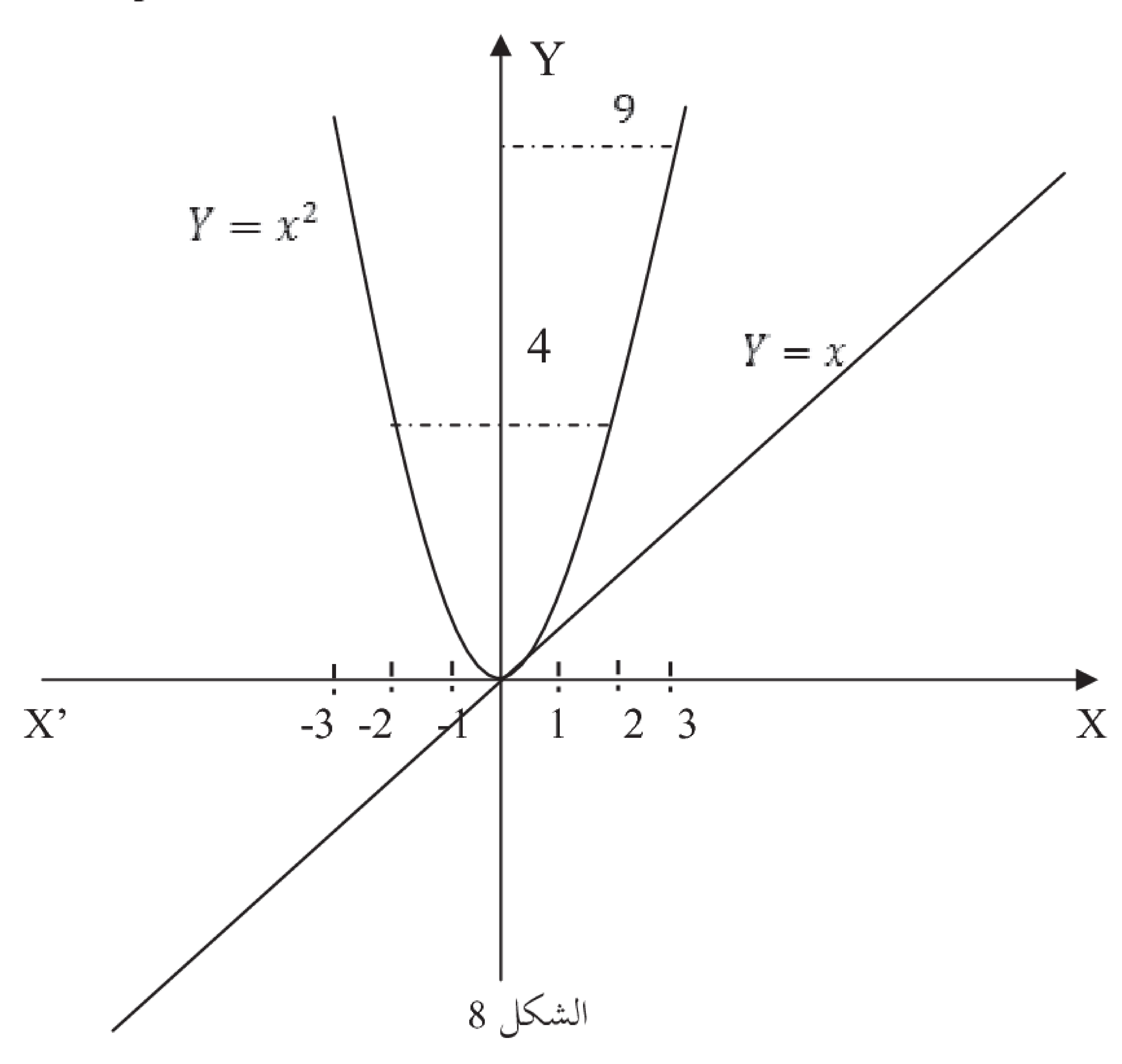
حل النظام $x = 0$ و $x^2 = 0$

وهذا هو الرسم للمنحنيات.

$y2 = x$ و $Y1 = x^2 = 0$

وبالتالي الحلول هي النقاط التي هي جذور النظام المقترح، وإما:

(y2 = 1 و x2 = 1) أو (x1 = 0 و Y1 = 0) (أنظر الشكل 8)



الشكل 8

من مفاهيم المشتقة، التفاضلية، المرونة والقيم الحدية لتابع:

- **مشتق** لتابع f في نقطة X_0 (إن وجد) هو $f'(x0)$

- المعرف ب: $f'(x0) = \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x0}$

- إذا **كان ا** لتابع f قابل للاشتقاق، التفاضلية التابع f التي نرمز لها ب dy ويعرف عن طريق ما يلي:

$$dy = f'(x)\ dx = y'dx$$

- إذا **كان** التابع f قابل للاشتقاق، مرونة التابع f عند نقطة حيث $y \neq 0$ هي

الكمية: $E = \frac{dy}{dx}.\frac{x}{y}$

لدينا:

الخواص الأساسية للاشتقاق:

إذا كان f و g تابعان و λ، μ اثنين من الثوابت. ثم:

$$(\lambda .f(x) + \mu. g(x))' = \lambda. f'(x) + \mu. g'(x).$$

$$(f. g)' = f'. g + f. g' ،$$

$$(f/g)' = (f'. g - f . g') / g^2 (x) \text{ ز } g(x) \neq 0.$$

أو

$$d(f.g) = g.df + f. dg ،$$

$$d(f/g) = (g.df - f . dg) / g^2 \text{ ز } g(x) \neq 0.$$

f **متزايدة على مجال** إذا ا **كان** x € I مهما كان، $f'(x) \geq 0$

f **متناقصة على مجال** إذا **كان** x € I ،مهما كان $f'(x) \leq 0$

إذا كان f **قابل للاشتقاق مرتين والمشتق من الرتبة الثانية مستمر و** $f'(x0) = 0$

لدينا:

- f له **حد أدنى** عند نقطة x0 إذا ا كان $0 < f''(x0)$
- f له **حد أقصى** عند نقطة x0 إذا ا كان $0 > f''(x0)$

المشتقات لبعض التوابع الأولية:

f (x)	f ′ (x)	**f (x)**	f ′(x)
k(ثابت)	0		
x^k	$k.x^{k-1}$	λx^k	$\lambda k.x^{k-1}$
sin x	cos x	cos x	- sin x

ب) **التوابع ذات متغيران حقيقيان:**

تابع ذو متغيران حقيقيا ن يرفق لكل (x ، y) العدد z ونكتب:

$$(x، y) € IR^2 \rightarrow z = f(x، y) € IR$$

مفاهيم المشتق الجزئي مشتق ونقطة ثابتة لتابع ذو متغيران:

- المشتق الجزئي لتابع f بالنسبة للمتغير الأول (إن وجد) معرف ب:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to x0} \frac{f(x, y) - f(x0, y)}{x - x0}$$

- المشتق الجزئي لتابع f بالنسبة للمتغير الثاني (إن وجد) معرف ب:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{y \to y0} \frac{f(x, y) - f(x, y0)}{y - y0}$$

- النقاط الثابتة لتابع f معرف ب:

$$f: (x ، y) € IR^2 \rightarrow z = f(x ، y) € IR$$

هي النقاط التي تعدم $\frac{\partial f}{\partial x} et \frac{\partial f}{\partial y}$ يعني (x ،y)

حل لمجموعة معادلتين:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial f}(x, y) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right)$$

تطبيقات التوابع ذات متغيران حقيقيان في الاقتصاد:

المثال الأول. 14 (تطبيق في الاقتصاد): حالة الإنتاج بدلالة رأس المال والعمل ليكن: Q = f(K، L) حيث:

تمثل على الترتيب العمل. رأس المال ودالة الإنتاج وحيث Q، K و L

$$Q = f(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

تمثل على الترتيب مرونة الناتج بالنسبة إلى العمل، مرونة الناتج بالنسبة لرأس المال والتقدم التقني في المثال السابق، $A\alpha\ et\ \beta$، يمكننا القول أن الإنتاج يتغير بدلالة رأس المال و العمل ويختلف اعتمادا على رأس المال والعمل. وهذا يعني أن نطاق الأداء. لذا يتعين علينا: نرمز لنسبة الغلة بالرمز: $(\alpha+\beta)$

- وإذا كان أكثر من 1، هو زيادة الغلة
- وإذا كان أقل من 1، منخفضة الغلة
- إذا كان يساوي 1، عائد مستمر ليكن:

هامشية الإنتاج $\frac{\partial f(k,l)}{\partial K}$ والهامشية لإنتاج بالنسبة للعمل $\frac{\partial f(k,l)}{\partial L}$ بالنسبة لرأس المال.

لدينا:

$$\frac{\partial f(k,l)}{\partial L}=\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}=\beta\frac{Q}{L}\text{ ،}$$
$$\frac{\partial f(k,l)}{\partial K}=\beta AK^{\alpha-1}L^{\beta}=\alpha\frac{Q}{K}$$

هو مرونة الناتج بالنسبة لرأس المال ، بل هو من هذا القبيل ما يلي: EQK

$$EQk=\frac{\partial Q}{\partial K}.\frac{K}{Q}=(\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta})\frac{K}{Q}=\alpha\frac{Q}{K}.\frac{K}{Q}=\alpha$$

هو مرونة الناتج بالنسبة للعمل، بل هو من هذا القبيل ما يلي: EQL

$$EQL=\frac{\partial Q}{\partial L}.\frac{L}{Q}=(\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1})\frac{L}{Q}=\beta\left(\frac{Q}{L}\right)\frac{L}{Q}=\beta$$

تمارين الفصل الأول

التمرين I: أحسب المشتق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة للتوابع التالية:

a) $y = x^7; 2x^5; \frac{5}{3}\chi^{\frac{3}{5}}; 3x^2 + 2x^3;$

b) $y = e^{2x}; e^{(3x+2)}; e^{(1/x)};$

c) $y = (x+2)(x^2-1)$

التمرين II: أحسب التفاضلية dy بالنسبة للتوابع التالية:

$$y = x^7; \ \chi^{\frac{2}{3}}; x\,e^{(2x+1)}$$

التمرين III: أحسب المرونة E بالنسبة للتوابع التالية:

a) $y = e^x$

b) $y = x.\,e^x$

c) $y = x^3$

التمرين IV : عين النقاط الثابتة للتوابع ذات متغيران:

a) $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2$

b) $f(x, y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$

c) $f(x, y) = x^2 + 6xy + 9y^2$

التمرين V:

ا) حل نظام المعادلات بيانيا:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 8y = 6 \\ -3x + 4y = 11 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 4x - y = 0 \\ x^2 - 4 - y = 0 \end{cases}$$

ب) حل المعادلة بيانيا:

$$-2x^2 - x + 10 = 0$$

حلول تمارين الفصل الأول

التمرين I:

a) $\frac{dy}{dx} = 7x^{6}$; $10\ x^{4}$; $(5/3)\ (5/3)\ x^{(-2/5)} = x^{(-2/5)}$; $6\ x\ + 6\ x^{2}$

b) $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$; $3e^{(3x+2)}$; $(-1/x^{2})\ e^{(1/x)}$;

c) $\frac{dy}{dx} = 1.\ (x^{2} -1) + (x+2)\ (2x) =\ x^{2} -1 + 2x^{2} + 4x = 3x^{2} + 4x -1$

التمرين II:

$$d\,y = 7x^{6}\,dx; \qquad (2/3)x^{(-1/3)}\ dx;$$

$$e^{(2x+1)} + x\,.\,(2)\,e^{(2x+1)}\ dx = (1+2x)\,e^{(2x+1)}\ \mathbf{dx}$$

التمرين III:

a) $E = \frac{dy}{dx}.\frac{x}{y} = e^{x}\,.\,(x / e^{x}) = x)$ يستلزم $\frac{dy}{dx} = e^{x}$

b) $\mathbf{E} = e^{x}\,.(x+1).(x / x.\,e^{x}) = x+1$ **يستلزم** $\frac{dy}{dx} = e^{x}\,.(x+1)$

c) $\mathbf{E} = 3\,x^{2}\ .\ (x / x^{3}) = 3$ **يستلزم** $\frac{dy}{dx} = 3\,x^{2}$.

التمرين IV:

أ) النقاط الثابتة $(x ، y)$ للتابع المعرف ب**:**

$$(x,y) \rightarrow f(x,y) = 4x^{2} + 2xy + y^{2}$$

إحداثياتها y و x هي حل نظام المعادلات:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\right)$$

يكافئ: (8 x + 2 y = 0 ،2 x + 2 y = 0)

وبالتالي توجد نقطة ثابتة وحيدة**:** (x = 0 ،y = 0)

ب) النقاط الثابتة (x ،y) للتابع **المعرف ب:**

$$(x ,y) \rightarrow f(x ,y) = -x^2 + x - xy + y - y^2$$

إحداثياتها y و x هي حل نظام المعادلات:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right)$$

يكافئ: (-2 x - y + 1 = 0 ،- x - 2 y + 1 = 0)

وبالتالي توجد نقطة ثابتة وحيدة**:** (x = 1/2 ،y = 1/2)

ج) النقاط الثابتة (x،y) **للتابع المعرف ب:**

$$(x ,y) \rightarrow f(x , y) = x^2 + 6xy + 9y^2$$

إحداثياتها y و x هي حل نظام المعادلات:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right)$$

يكافئ: (2 x + 6 y = 0 ،6 x + 18 y = 0)

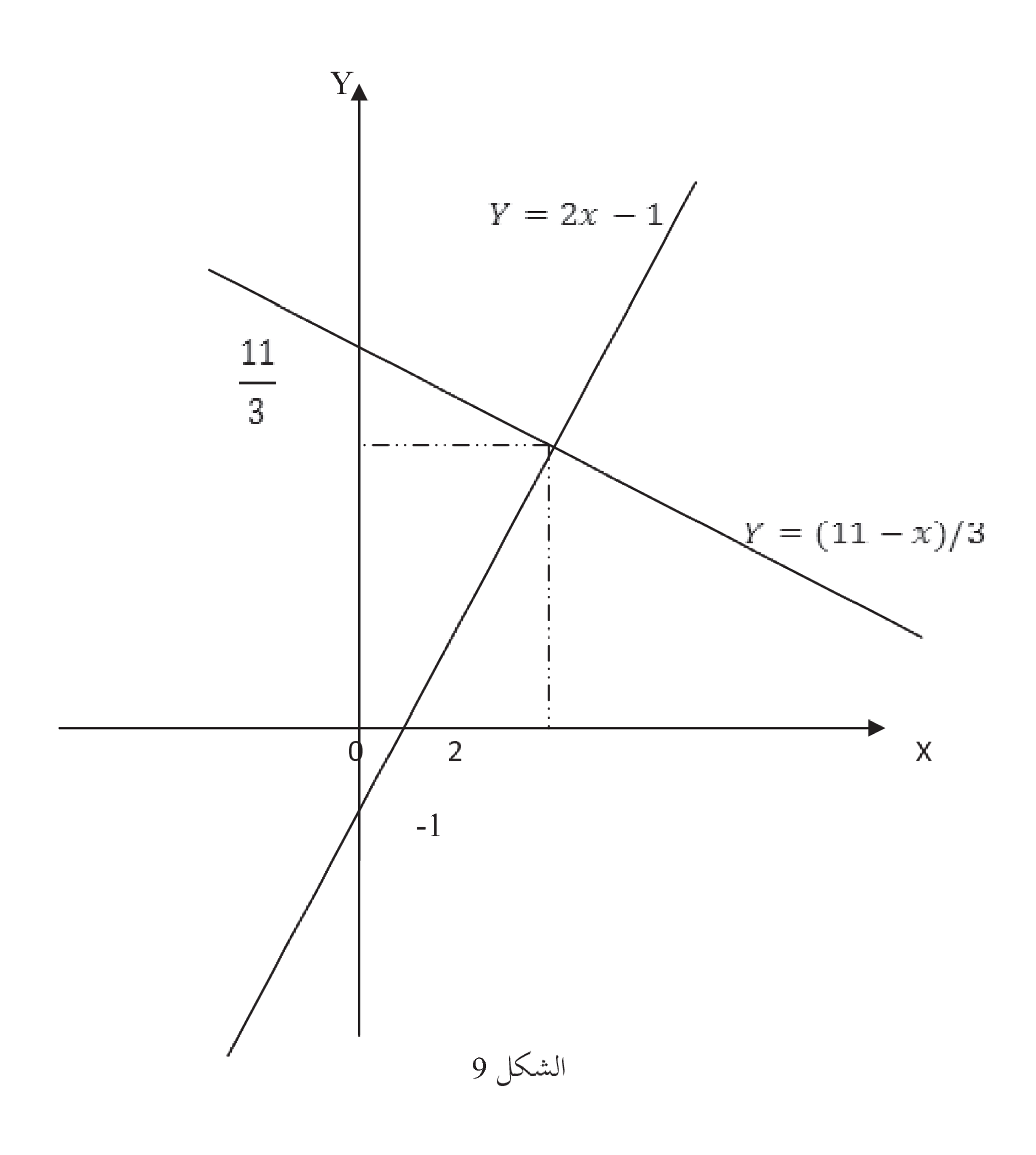
وبالتالي يوجد عدد غير منته من الحلول**:** (-3 y، y) حيث y **€ IR**
f (x ،y) له عدد غير منته من النقاط الثابتة وموجودة على المستقيم y = -(1/2).x

التمرين V:

ننشئ المستقيمان: y = (11 – x)/3 و y = 2 x - 1 (أنظر الرسم 9)

الحل هوالنقاط المناسبة لجذور نظام المعادلات ونجد:

x = 2 و y = 3.

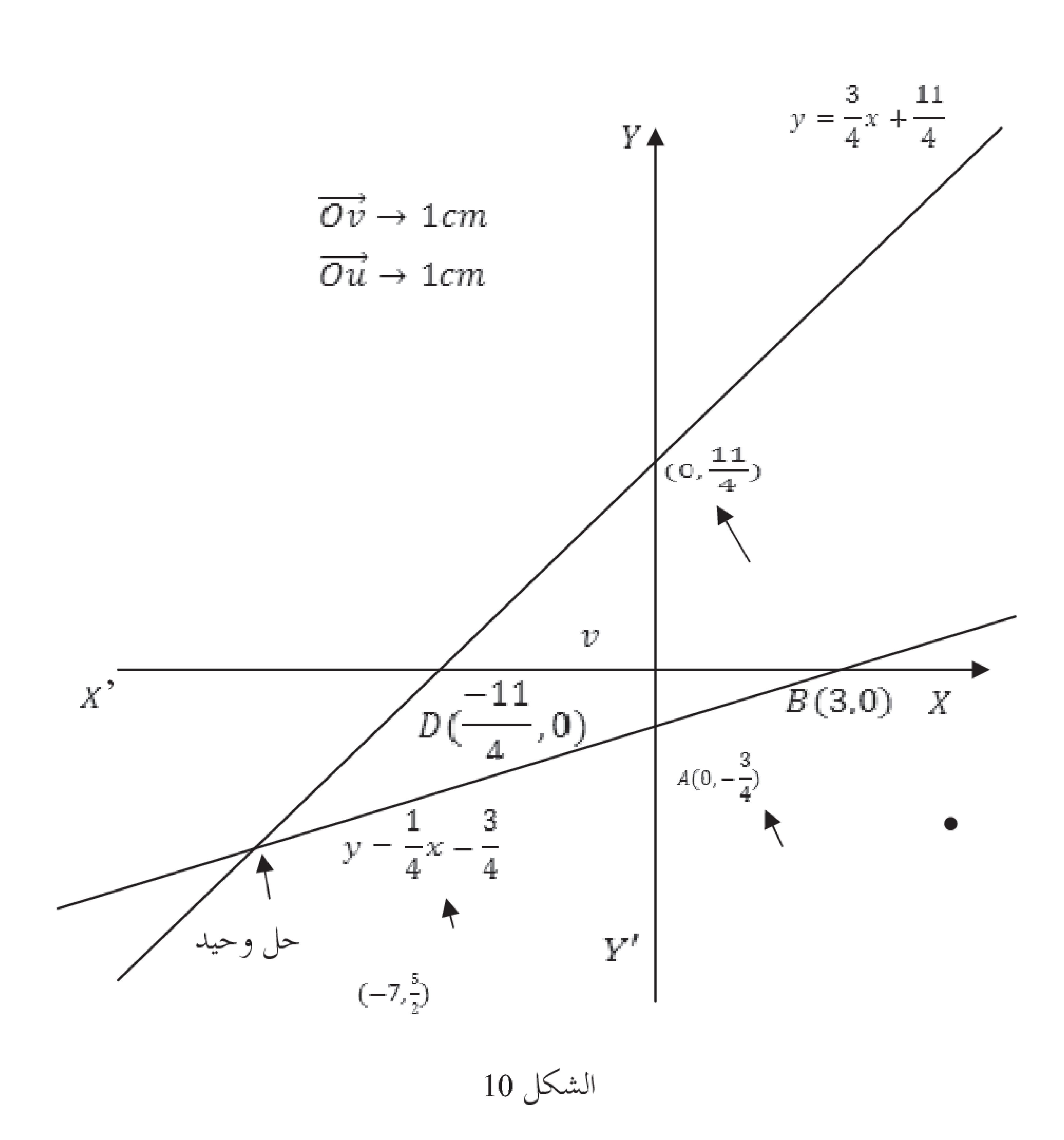


الشكل 9

ننشئ: $y = (3\,x / 4) + (11 / 4)$ و $y = (x / 4) - (3 / 4)$
(أنظر الرسم 10)

الحل هو النقاط المناسبة لجذور نظام المعادلات ونجد:

$x = -7$ و $y = -5 / 2$.

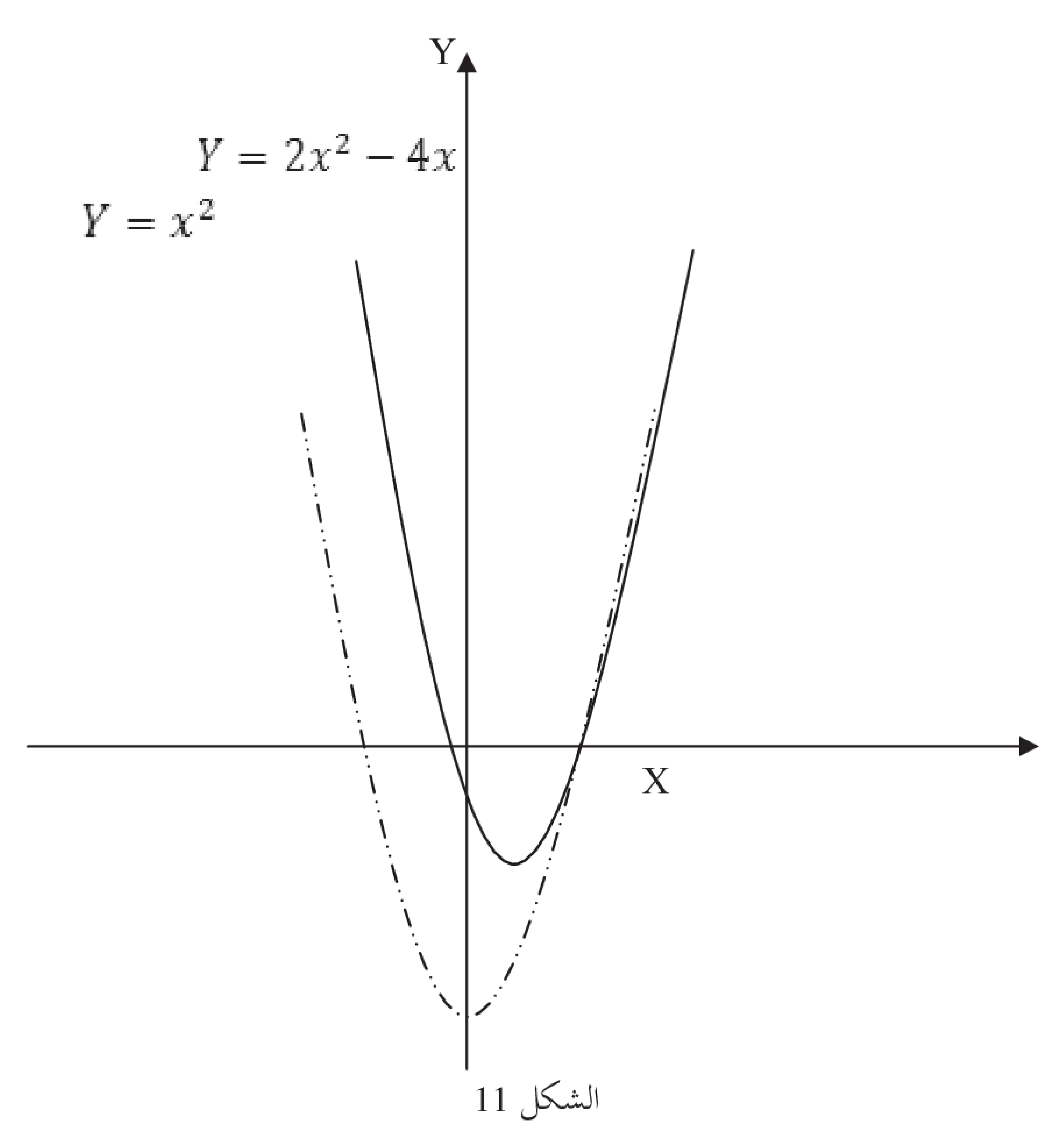


الشكل 10

أ) ننشئ المنحنيان: $y1 = 2x^2 - 4x$ et $y2 = x^2 - 4$ (أنظر الرسم 11)

الحل هو النقاط المناسبة لجذور نظام المعادلات ونجد الجذر المضاعف:

$x = 2$ et $y = 0$.



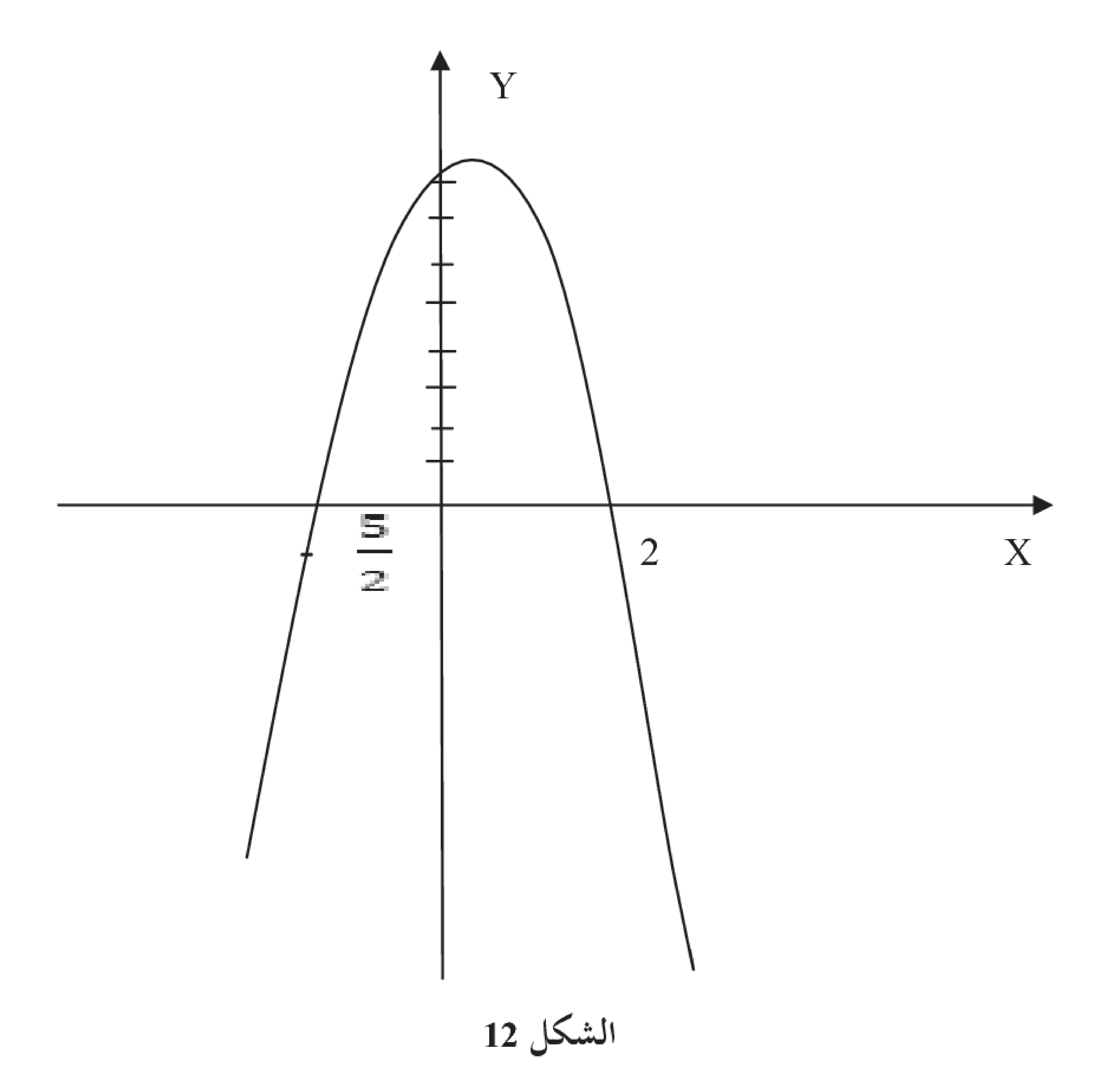
الشكل 11

ب) ننشئ المنحنى الممثل للمعادلة: $y = -2x^2 - x + 10$ التي هي قطع مكافئ للقمة.

(½ ،-2.(1/4) –(1/2) + 10)(أنظر الرسم 13)

الحل هو النقاط المناسبة لجذور نظام المعادلات ونجد الجذور:

$x1 = -(5/2)$ et $x2 = 2$.



الشكل 12

الفصل الثاني

حساب المصفوفة

مقدمة: هذا الفصل من الضروري، لأن حساب المصفوفة يستعمل في المحاسبة التحليلية لحساب الأسعار والتكاليف. آخر بالغ الأهمية لحساب المصفوفة هو حساب الأسعار ودوران.

- نستخدم مصفوفة من **الشكل** (m،n) ونرمز لها ب (M(m، n

وهي عبارة عن مجموعة ذات أعداد حقيقية مرتبة (m. n) في مجموعة من مستطيل متكون من m عمود وnخط ويمثل هذا عن طريق ما يلي:

$$M,(m,n)-\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– **منقول مصفوفة**M(m,n) هي مصفوفة من الشكل (m,n) ، نرمز لها ب M حيث خطوطها هي منقول خطوط M **وأعمدتها هي منقول خطوط هي منقول أعمدة** M **لدينا:**

الخواص الأساسية للمصفوفات:

– جمع المصفوفة:

لتكن المصفوفتان:

$A(m,n)=(aij)\ et\ B(m,n)=(bij)$ ، من نفس الشكل لدينا (A + B) عبارة عن مصفوفة من نفس الشكل ومعرفة ب:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

– **جداء المصفوفة:** وجداء مصفوفتان A و B الذي نرمز له ب A×B يكون معرف إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد خطوط B.

إدا كان A وB عبارة عن مصفوفتين (A(m,n و(B(n,p في هذه الحالة AxB هو عبارة عن مصفوفة (C (m,p من الشكل cij حيث i هو جداء الخط ل A . مع العمود j ل B .

– **جداء مصفوفة مع سلمي:** إذا كان: A مصفوفة من الشكل (m,n) فإن λ A هي مصفوفة من الشكل (m,n) وحيث (λ.aij) = λ A. (λ Є IR) .

– **جداء شعاع مع مصفوفة:** شعاع خطي هو مصفوفة (V(1,n وبالتالي: فجداء شعاع مع مصفوفة هو حالة خاصة من جداء المصفوفة.

– **المصفوفات الخاصة:**

. **مصفوفة الوحدة:**

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة حيث جميع العناصر تساوي صفر والعناصر القطرية تساوي 1.

. **المصفوفة العادية:**

مصفوفة B **عادية** أو قابلة للعكس إذا كان هناك مصفوفة A حيث: $A.B = B.A = In$ وحيث In مصفوفة الوحدة.

. **مساعد مصفوفة لمصفوفة مربعة من أجل 2:**

إذا كان $M(2,2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ فان هذا يستلزم أن مساعد المصفوفة هو:

$$\text{adj } M(2,2) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

محدد مصفوفة مربعة من أجل 2:

محدد المصفوفة $M(2, 2)$ هو العدد $(ad - bc)$.

العكس لمصفوفة مربعة: إذا كان محدد المصفوفة غير معدوم فان المصفوفة قابلة للعكس وعكسها هو:

$$M^{-1}(2،2) = (\text{adj } M)/\det M$$

- تطبيقات لحساب المصفوفة في الاقتصاد:

المثال الثاني 1: حساب الأسعار ودوران:

المثال الثاني.1.1: التسعير:

هناك شركة لتوزيع الوقود يوصي على بضاعة من شركة التعدين:
2 طن من فحم الكوك، 1طن من الطوب، 3 طن من أنثراسايت.

السعر للطن الواحد هي:

فحم الكوك: 800؛ قوالب: 1000 الفحم: 1200.

العمل المطلوب:

حساب السعر الإجمالي على الدفع.

الحل : ليكن Q الشعاع $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

شعاع الكمية وP شعاع الدفع حيث $P = (800 ،1\,000 ،1\,200)$

$PQ = (800 ،1\,000 ،1\,200)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$: السعر الإجمالي على الدفع $= 6\,200$

المثال الثاني.1.2: إحصاءات الأسعار ودوران:

شركة تقوم بتصنيع السكاكين. إنتاجها يتألف في المقام الأول من 3 أنواع من A3، A2، A1 البنود المشار إليها، والطلب من 4 عملاء C4، C3، C2، C1.

أسعار 1000 أجزاء على التوالي هي:

A_1، A_2 و A_3 : 1 000 f ،2 000 f و 8 000 f.

طلبات العملاء هي كما يلي (بآلاف الوحدات):

C1 للزبون : 7، 2،0

C2 للزبون : 8، 1،2

C3 : 6، 0،0

C4 : 3، 0،8

العمل المطلوب:

1) احسب الثمن الواجب دفعه لقاء لكل عميل.

2) حساب مجموع الكميات التي يتعين أداؤها.

3) احسب بطريقتي الدخل الإجمالي الدخل للشركة من هذه العملية

الحل:

1) الأسعار التي يدفعها العميل:

العرض الأول: جداء الأشعة:

C_1: بالنسبة ل $(7,2,0)\begin{pmatrix}6\,000\\2\,000\\8\,000\end{pmatrix} = 46\,000$

C_2: بالنسبة ل $(8,1,2)\begin{pmatrix}6\,000\\2\,000\\8\,000\end{pmatrix} = 66\,000$

C_3 بالنسبة: (6،0،0) $\begin{pmatrix} 6\,000 \\ 2\,000 \\ 8\,000 \end{pmatrix} = 36\,000$

C_4 بالنسبة: (3،0،8) $\begin{pmatrix} 6\,000 \\ 2\,000 \\ 8\,000 \end{pmatrix} = 82\,000$

العرض الثاني: جداء مصفوفة مع شعاع

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 2\,000 \\ 8\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46\,000 \\ 66\,000 \\ 36\,000 \\ 82\,000 \end{pmatrix}$$

2) الكمية الإجمالية للدفع:

(7، 2،0) + (8، 1،2) + (6، 0،0) + (3، 0،8) = (24، 3، 10) هو في ألاف أي
1 000 (24، 3، 10) = (24 000، 3 000، 10 000).

3) الدخل الإجمالي

– الحل الأول:

$$(24،\ 3،\ 10) \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 2\,000 \\ 8\,000 \end{pmatrix} = 230\,000$$

– الحل الثاني

46 000 + 66 000 + 36 000 + 82 000 = 230 000

تمارين الفصل الثاني

التمرين I: لتكن المصفوفة $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

والأشعة التالية: $x = (1,2); \quad y = (3,-1) \quad et \quad z = (1,1)$

1) أحسب $x.M; \quad y.M \quad et \quad z.M$

2) أكتب المصفوفة M^t والأشعة y^t، x^t z^t

3) أحسب $M^t.z^t$، $M^t.y^t$، $M^t.x^t$

التمرين II: لتكن المصفوفتان

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) **أحسب** : $2A-3B$، $A-B$، $A+B$

2) أكتب المصفوفات B^t و A^t

3) **أحسب** $B.B^t$، $A.A^t$، $B.A^t$، $A.B^t$

التمرين III: لتكن المصفوفتان

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) **أحسب** $A.B$ و $B^t.A^t$ ثم قارن بينهما

التمرين IV: لتكن المصفوفة والشعاع

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } u = (1،3،-1).$$

1) **أحسب**: $M.u^t$ و $u.M$

2) **أحسب**: $M^t.u^t$ et $u.M^t$ ثم فارن على التوالي مع $M.u^t$ et $M\,u$

التمرين V: لتكن المصفوفة M حيث:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

أحسب محدد المصفوفة و مساعد مصفوفة والمصفوفة العكسية إن وجدت.

التمرين VI: دراسة لشروط التصنيع.

الشركة تقوم بتصنيع ثلاثة أنواع من قطع الغيار: P1، P2، P3 باستخدام المواد الأولية الأربعة: M1، M2، M3، M4.

مصفوفة العوامل التقنية هي على النحو التالي:

$$M = \begin{matrix} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

هذه القطع تستعمل في مصنع لتصنيع المنتوجات التامة F1، F2، F3 مصفوفة العوامل التقنية هي على النحو التالي:

$$N = \begin{matrix} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_1 & P_1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

العمل المطلوب:

تحديد الكميات من كل المواد اللازمة لكل نوع من المنتجات.

حلول تمارين الفصل الثاني

التمرينI:

(1
$$x.M = (1,2)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

لأنه من الممكن حساب x(1,2) M(2,3) لأن عدد خطوط المصفوفة يساوي عدد أعمدة الشعاع فنجد:

$$x.M = (1,2)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[1.(-1) + 2.2, 1.0 + 2.1, 1.1 + 2.(-1)\right] = \left[3, 2, -1\right]$$

أيضا:

$$y.M = \left[3,-1\right]\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left[-5,-1,4\right]$$

$$z.M = \left[1,1\right]\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left[1,1,0\right]$$

2)

$$M^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{وبالتالي} \quad x^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; y' = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}; z' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من الممكن حساب $M^t(3,2)$ $x^t(2,1)$ لأن عدد أعمدة المصفوفة يساوي عدد خطوط الشعاع.

فنجد:

$$M^t.x^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M^t.y^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$M^t.z^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين II:

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 8 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -9 & 3\\ 6 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 9\\ 14 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

(2

$A(2\times 3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ يستلزم $A^t\,(3\times2)$، $A^t=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

لدينا أيضا:

$B\,(2\times3)$، **يستلزم** $(3\times2)\,B^t$، **أي** $B^t=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$A(2\times 3).B^t(2\times 3)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & -9\end{pmatrix}$$

$$B\,(2\times3).A^t\,(3\times2)=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & -9\end{pmatrix}$$

$$A\,(2\times3).A^t\,(3\times2)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -1\\ -1 & 17\end{pmatrix}$$

$$B\,(2\times3).B^t\,(3\times2)=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

التمرين III:

من الممكن حساب A(3,4). B(4,2) لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد خطوط المصفوفة الثانية، فنجد:

$$A.B=\begin{pmatrix}1&3&-1&-3\\0&2&0&-2\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\\-1&4\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-3\\4&0\\10&25\end{pmatrix}$$

لدينا أيضا:

$$B^t(2\times4).A^t(4\times3)=\begin{pmatrix}1&3&-1&-3\\ \\1&3&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\3&2&4\\-1&0&1\\-3&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4&10\\ \\-3&0&25\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة $B^t.A^t$ هي منقول المصفوفة A. B.

التمرين IV:

(1

$$u.M=(1,3,-1)\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&3&2\\0&0&2\end{pmatrix}=(2,11,4)$$

$$M.u^t=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&3&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\\-2\end{pmatrix}$$

2)

$$M.u^t=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&3&0\\0&2&2\end{pmatrix}$$ حيث هي منقولM

لدينا أيضا:

$$u.M^t=(1,3,-1)\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&3&0\\0&2&2\end{pmatrix}=(5,8,-2);$$

وبالتالي:

$$M^t.u^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad M^t.u^t = (u.M)^t$$

التمرين V:

لدينا:

$$\det M = 2.3 - (-5).(-1) = 6 - 5 = 1$$

$$(\text{adj } M) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$: حيث هي مساعد M

بما أن $\det M = 1$، فان M قابلة للعكس ولدينا:

$$M^{-1}\ (2,2) = (\text{adj } M)/\det M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

التمرين VI:

نلجأ إلى استعمال جداء المصفوفات $Q = N\,M$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الحسابات:

	6 3 2 4 2 1 3 6 3 2 2 4
5 3 2	42 22 23 46
4 1 6	44 25 23 46
3 2 1	25 13 14 28
	M_1 M_2 M_3 M_4

الفصل الثالث

نظم المعادلات من الدرجة الأولى ذات عدة مجهولة

مقدمة: هذا الفصل ضروري، لأن نظام المعادلات من الدرجة الأولى يستعمل في الاقتصاد لحساب المنافع المتبادلة. تطبيق آخر هام جدا للنظم المعادلات هو حساب تكلفة، اقتصاد حيوي.

1) نظم المعادلات من الدرجة الأولى:

إذا جمعنا بين كل المعادلات لتكون صحيحة في نفس الوقت نحصل على منظومة من المعادلات. وبصفة عامة، يقابل لهدا المنظومة حل وحيد شكلت قيمة مجهولة.

2) القرار من نظام المعادلات من الدرجة الأولى (الخطية) مع اثنين من المجهولة:

المبدأ: ولحل مثل هذا النظام، يجب أن نقضي على واحدة من المجهول، أي جعلها تختفي لأنها أكثر إلى أن حل معادلة من الدرجة الأولى، ما نعرفه.

أ) القضاء بالاستعاضة:

عزل واحدة من المجهولة في المعادلة الأولى وتعويض هذه القيمة في الثانية.

مثال.1 ثالثا:

حل:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 & (1) \\ 3y - 2x = 6 & (2) \end{cases}$$

نحسب x من: (1)

$3x - 2y = 1$ **يعطي** $x = (1 + 2y)/3$

بعرض هذه القيمة في: (2)

$3y - 2x = 6$ تصبح $3y - 2.(1 + 2y)/3 = 6$ (3)

ويبقى حل معادلة من الدرجة الأولى مع واحدة غير معروف؛ (3) تنص على ما يلي: $y = 4$

تأجيل في هذه القيمة (1) أو (2)، نحصل على $x = 3$ الحل المطلوب هو $y = 4$، $x = 3$.

ب) **القضاء على جانب المقارنة**:

نعزل واحدة من المجهولة في كل من معادلات ونقارن القيم الموجودة.

مثال.1 ثالثا:

حل:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 & (1) \\ 3y - 2x = 6 & (2) \end{cases}$$

نحسب x من: (1)

$3x - 2y = 1$ يعطي $x = (1 + 2y)/3$

نحسب x من: (2)

$3y - 2x = 6$ يعطي $x = (3y - 6)/2$

نقارن القيم:

$(1 + 2y)/3 = (3y - 6)/2$ (3)

ويبقى حل معادلة من الدرجة الأولى مع واحدة غير معروف؛ (3) تنص على ما يلي: $y = 4$

الحل المطلوب هو $y = 4$، $x = 3$

ج) **القضاء بالاضافة**:

- نضرب المعادلة الأولى بمعامل x الموجود في الثانية
- نضرب المعادلة الثانية بمعاملx الموجود في الأولى
- الفرق للمعادلات المحصل عليها
- نحل معادلة من الدرجة الأولى المحصل عليها

مثال.1 ثالثا:

حل:

$$\begin{cases} 3x-2y=1 & (1) \\ 3y-2x=6 & (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في (-2) والمعادلة (2) في 3، نحصل على:

$$\begin{cases} -6x + 4y = -2 & (1) \\ 9y - 6x = 18 & (2) \end{cases}$$

الفرق للمعادلتين المحصل عليها يعطي: $-5y = -20$ الذي يعطي $y = 4$
تأجيل هذه القيمة في (1) أو (2)، نحصل $x = 3$.

3) **حل نظام من المعادلات لأكثر من مجهولين**:

سنفعل نفس الشيء كالنظام **مع اثنين من المجهولة**، ولكن حسابات أطول. وفي هذه الحالة، يمكننا حل هذا النظام وتطبيق **مبادئ حساب مصفوفة**.

مبادئ حساب التفاضل والتكامل للمصفوفة:

النظام:

$$\begin{aligned} a.x+b.y+c.z=d \quad & (I) \\ a'.x+b'.y+c'.z=d' \quad & (II) \\ a''.x+b''.y+c''.z=d'' \quad & (III) \end{aligned}$$

مكتوب في شكل مصفوفة:

EX=F

حيث:

$$E=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

وحيث:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}$$

$$\Delta = \textbf{d et E}$$

$$\Delta x=\begin{pmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

المثال الثالث.2:

حل:

$$\begin{cases} 5x+y+3z=6 \\ 15x+3y-4z=-8 \\ x-2y-5z=1 \end{cases}$$

أ) القرار من خلال ضرب:

نعزل y في (**1**) هو أسهل لأن هناك المعامل1. فنجد:

y = 6 -5x -3z

– بعرض هذه القيمة في (**2**) و (**3**).

15x + 3.(6 -5x -3z) - 4z = -8 **(2)** الذي يعطي **(4)** z = 2

x – 2. (6 -5x -3z) – 5z = 1 **(3)** الذي يعطي **(5)** 11 x + z = 13

ويبقى حل نظام المعادلات 2 من 2 معروف (**4**) و (**5**)، التي تنص على

ما يلي: $x = 1$ و $z = 2$

والحل المطلوب هو: $z = 2$، $y = -5$، $x = 1$

أ) **القضاء على جانب المقارنة:**

نعزل x في (1) ، (2) و (3)

(1) $x = (6 - y - 3z)/5;$

(2) $x = (4z - 3y - 8)/15;$

(3) $x = (1 + 2y + 5z)$

– نقارن بين قيم حصل لاثنين من اثنين:

(1) و **(2)** $(6 - y - 3z)/5 = (4z - 3y - 8)/15$ **(4)**

(1) و **(3)** $(6 - y - 3z)/5 = (1 + 2y + 5z)$ **(5)**

نحصل على نظام المعادلات 2 مع 2 المجهولة التي شكلتها (4) و (5)، والتي تحل بالطرق العادية.

ب) **القرار وذلك بإضافة:**

نزيل y، على سبيل المثال ما بين (1) و (2) و (1) و (3)

– للقضاء على (1) و (2)

(1) $5x + y + 3z = 6$ نضرب المعادلة (1) في 3

(2) $15x + 3y - 4z = -8$ نضرب المعادلة(2) في (-1)

فنجد:

(1) ل $15x + 3y + 9z = 18$

(2) ل $-15x - 3y + 4z = +8$ بالجمع نجد:

$13z = 26$ الذي يعطي $z = 2$ (4)

– للقضاء على (1) و (3):

$(1)\ 5x + y + 3z = 6$ يضرب في 3

$(2)\ 15x + 3y - 4z = -8$ يضرب في 1-

فنجد:

$10x + 2y + 6z = 12$ ل (1)

$x - 2y - 5z = 1$ ل (3)

بالجمع نجد:

$11x + z = 13$ الذي يعطي $z = 2$ (5)

وهذا يتيح لنا نظام المعادلات 2 مع 2 المجهولة التي شكلتها (4) و (5)، والتي تحل بالطرق العادية.

التطبيقات لنظام المعادلات في الاقتصاد:

المثال الثالث. 4: الخدمات المتبادلة بين المراكز في تقييم الأسهم اجتماع الأطراف:

مؤسسة تصنع وتبيع علب من الحديد الأبيض بفضل المادة الأولية قطعة الحديد الأبيض. هذه عمليات التصنيع تتم في ورشة عمل. نشاط الفترة المخصصة لتصنيع علب من نفس الطراز. التوزيع للتكاليف غير المباشرة بين مراكز يعطي النتائج التالية:

- الإدارة 3725
- القوة المحركة 4059.9
- الصيانة 16185.5
- التموين 1577.9
- إنتاج 146804.7
- توزيع 815 32

ويبين الجدول أدناه يعطي مفاتيح التوزيع للمراكز المساعدة:

	مفاتيح التوزيع		
	الإدارة	القوة الدافعة	الصيانة
المراكز المساعدة			
الإدارة	0	1	0
القوة الدافعة	1	0	2
الصيانة	1	1	0
المراكز الرئيسية			
التموين	1	1	2
انتاج	5	7	6
توزيع	2	0	0
	10	10	10

أعباء التموين تحمل لتكلفة شراء الحديد الأبيض. طريقة تقييم المخزون الذي تستخدمه شركة هي التكلفة المتوسطة المرجحة لتكلفة المشاركات مع تراكم المخزون الأولي.

في بداية الفترة، كان في المخزون:

- 20 طنا من الحديد الأبيض بتكلفة شراء متوسطة مرجحة بثمن 5207.3 طن.
- 100000 علب من هذا النموذج وتقدر تكلفة الإنتاج المتوسط المرجح 93.16 ل . 100 صندوقا.

خلال تلك الفترة:

- دخول كميات تخزين المواد الأولية وكانت (بثمن الشراء).
  - 20 طن بثمن 5200 طن.
  - 10 طنا بثمن 800 طن.
  - 30 طن بثمن 5400 طن.
- تم استعمال 70 طنا من الحديد الأبيض.
- التكاليف المباشرة للأجور:
  - للتصنيع 121394 دج،
  - للتوزيع 153120 دج،
- ورشة العمل أنتجت 700000 علبة،
- بلغت مبيعات صناديق 600000 السليمة لهذا النموذج. وكان ثمن البيع ثابت حيث: ل . 100 صندوقا 140 دج.

أحسب الخدمات المتبادلة بين المراكز المساعدة.

2- تقديم جدول التوزيع الثانوي للتكاليف غير المباشرة.

3- تحديد مختلف التكاليف وسعر التكلفة والنتيجة.

الجواب:

الخدمات المتبادلة:

الإدارة:

$$\rightarrow \quad x = 3725 + \frac{y}{10} \qquad (1)$$

القوة المحركة:

$$\rightarrow \quad y = 4059{,}9 + \frac{x}{10} + \frac{2z}{10} \qquad (2)$$

الصيانة:

$$\rightarrow \quad z = 16185,5 + \frac{x}{10} + \frac{y}{10} \qquad (3)$$

$$(2) \quad x10 \rightarrow 10y = 40599 + x + 2z \qquad (4)$$

$$(3) \quad x10 \rightarrow 10z = 161855 + x + y \qquad (5)$$

$$(4) \quad x5 \rightarrow -10z = 202995 + 5x + 50y \qquad (6)$$

$$(5) \quad 6 \rightarrow 0 = 364850 + 6x + 49y \qquad (7)$$

$$(7) \quad \rightarrow 49y = 364850 + 6x$$

$$(1) \quad x5 \quad \rightarrow 30x = 111750 + 3y \qquad (8)$$

$$(7) \quad x5 \quad \rightarrow 24y = 1824250 + 30x \qquad (9)$$

$$(9) \quad \rightarrow -30x = 1824250 - 24y$$

$$(8)x(8) \rightarrow \quad 0 \quad = 1936000 - 242y \qquad (10)$$

$$(10) \quad \rightarrow 242y = 1936000$$

$$y = 8000$$

$$(1) \quad \rightarrow x = 3725 + \frac{8000}{10}$$

$$x = 4525$$

$$(3) \quad \rightarrow z = 16185.5 + \frac{4525}{10} + \frac{8000}{10}$$

$$z = 17438$$

جدول التوزيع الثانوي:

المراكز الرئيسية			المراكز المساعدة			المجموع	
توزيع	انتاج	تموين	مقابلة	القوة المحركة	الادارة		
32 815 905	146 804.7 2 262.5 5 600 10 462.8	1 577.9 452.5 800 3 487.6	16 185.5 452.5 800 -17 438	4 059.9 452.5 - 8 000 3 487.6	3 725 - 4 525 800	205 168	إدارة القوة المحركة صيانة
33 720	165 130	6 318	0	0	0	205 168	

- التكلفة المتتالية والنتيجة:

سعر الشراء من الحديد الأبيض:

20 t x 5 200 دج = 104 000

10 t x 5 800 دج = 58 000

30 t x 5 400 دج = 162 000

60 t x 5 400 دج = 324 000

أعباء التموين: **6 318**

تكلفة شراء الحديد الأبيض 318 330 = 60 t x 5 505.3:

قيمة المخزون الأول من الحديد الأبيض 207 5 20 t x: 146 104 = 3

المتوسط المرجح لتكلفة الوحدة: $\frac{104146+330318}{20+60}=5430.8$

الحديد الأبيض المستعملة: 156 380 = 70 t x S 430,8

اليد العاملة المباشرة مباشرة: 121 394

الأعباء غير المباشرة للإنتاج: 165 130

تكلفة الإنتاج: 680 666 =7 000 000 b x 0.9524

علبة تكلفة الانتاج لـ . 100 95, 24

93 = 93.16 x 1000: تكلفة الانتاج لـ . 000 100 علبة المخزنة في بداية المدة:

$$\frac{93160+666680}{20+60}=94.98$$

100 علبة: المتوسط المرجح لتكلفة الوحدة.

تكلفة إنتاج: 000 600 صناديق مباعة.

6 000 x 94.98 = 569 880

أعباء اليد العاملة المباشرة للتوزيع: 120 153

الأعباء الغير المباشرة للتوزيع: **720 33**

سعر التكلفة: 720 756 = 6 000 x 126.12

سعر البيع: 720 840 = 6 000 x 140

التكلفة سعر: **720 756**

النتيجة: 280 83

تمارين الفصل الثلث

التمرين I:

1) حل بالاستعاضة:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + 3y = 11 & (2) \end{cases}$$

2) حل باستخدام جانب المقارنة:

$$\begin{cases} y - 2x = 9 & (1) \\ 3y + 4x = 47 & (2) \end{cases}$$

3) حل باستخدام طريقة الإضافة:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 17 & (1) \\ y - 3x = 16 & (2) \end{cases}$$

التمرين II:

حل النظام

$$\begin{cases} 20x - 2y - z = 20 & (1) \\ 15x + y + z = -5 & (2) \\ 3y - 15x - 2z = 55 & (3) \end{cases}$$

التمرين III:

اعثر على رقمين حيث مرتين الأول ناقص ثلاث مرات الثانية يساوي 15، وأربع مرات الأول ناقصا ست مرات الثاني يساوي 45.

التمرين IV:

إن اثنين من المارة في وقت واحد في مغادرة المدينتين A وB يفصل بينهما 12كم وسيكون للقاء بعضهم البعض.

الطرف الأول على المشي 6 كلم / الساعة. والثانية في الفترة من B السير 4كلم / الساعة. بعد كم من الوقت يلتقيان.

التمرينV:

1) لتكن المصفوفة:
$$N=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -2a & 2b \end{pmatrix}$$

حيث b و a هما حقيقيا يختلفان عن الصفر.

أ) أحسب المحدد للمصفوفة N، مساعده مصفوفة ’N والجداء ’NN

ب) هل المصفوفة منتظمة ما هو السبب

ج) حل باستخدام حساب المصفوفة النظام:

$$\begin{cases} a.x-b.y=3 \\ -2a.x+2b.y=-6 \end{cases}$$

2) حل باستخدام حساب المصفوفة النظام:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$$

التمرين VI:

ليكن نظام المعادلات (1):

$$(1):\begin{cases} 2x+y+3z=a \\ 3x+2y+4z=b \\ x+2y-z=c \end{cases}$$

أ) أكتب على شكل مصفوفة النظام (1). نرمز ب A لمصفوفة معاملات

(x، y و z) مركبات X

(a، b و c) مركبات U

ب) عبر عن:

x ،y ،z بدلالة a ،b ،c

$$(2):\begin{cases} x=.... \\ y=.... \\ z=..... \end{cases}$$

حلول تمارين الفصل الثالث

التمرين I:

1)

نحسب x من: (1)

$x = \frac{(1+2y)}{3}$ **يعطي** $2x = 1 + y$

بعرض هذه القيمة في (2)

$(3): y = \frac{21}{7} = 3$ **يعطي** $(1 + y)/2 + 3y = 11$

تأجيل هذه القيمة في (3) مثلا، نحصل على $2 = 2/(1 + 3)$ $x = (1 + 3)/2$

الحل المطلوب هو $y = 3$، $x = 2$

2) نعزل y في (1) و(2)

(1) يعطي $y = (9+2x)$

(2) يعطي $y = (47-4x)/3$

- نقارن القيم التي حصل عليها:

$(9 + 2x) = (47 - 4x)/3$; نجد $x = 2$

تأجيل هذه القيمة في (1) مثلا، نحصل على $13 = (4 + 9)$ $y = (9 + 4)$

الحل المطلوب هو $y = 13$، $x = 2$

3)

بداية نحاول كتابة (2) في نفس الشكل (1)

(2) يعطي $y - 3x - x = -16$ يعني $-4x + y = -16$ (3)

النظام يكتب:

$$7x - 2y = 17 \quad (1)$$
$$-4x + y = -16 \quad (3)$$

نرى y يختفي إذا ضاعفنا المعادلة (3) مرتان وقمنا بعملية الجمع:

$$7x - 2y = 17 \quad (1)$$

$$\mathbf{-8x + 2y} = -32 \quad \text{مضروب } (1)$$

$$-x = -15; \text{ يعطي } x = 15$$

نجعل القيمة التي عثر عليها في (1)، على سبيل المثال، هناك $-2y = (17 - 105) = -2$

الذي يعطي: $y = 44$.

الحل المطلوب هو $y = 44$ ، $x = 15$.

التمرين II:

يحل هذا النظام باستخدام القضاء بالاستعاضة:

نحسب x من: (1)

$$x = (20 + 2y + z)/20$$

بعرض هذه القيمة في (2) و (3):

(2)يصبح $15.(20 + 2y + z)/20 + y + z = 5$: أي:

$3.(20 + 2y + z)/4 + (4y/4) + (4z/4) = 20/4$ **يعني:**

$$10y + 7z = -40 \quad (4)$$

(3)يصبح $3y - 15.(20 + 2y + z)/20 - 2z = 55$: أي:

$+ (12y/4) - 3.(20 + 2y + z)/4 - (8z/4) = 220/4$ **يعني:**

$$6y - 11z = 280 \quad (5)$$

نحل هذا النظام الحصول عليه:

$$10y + 7z = -40 \quad (4)$$

$$6y - 11z = 280 \quad (5)$$

نحسب y من المعادلة (4)

$$y = (-40 - 7z)/10$$

بعرض هذه القيمة في المعادلة (5)

تصبح المعادلة (5):

$$6.(-40 - 7z)/10 \quad -11z = 280$$

أي:

$$-152z = 3040$$ **يعني** $$z = -20$$

لحساب y على سبيل المثال، نجعل القيمة التي وجدت في المعادلة (4)،

$$(4) \quad 10y + 7.(-20) = -40$$

الذي يعطي $y = 10$.

لدينا من قبل:

$$x = (20 + 2y + z)/20$$

بعرض هذه القيمة الموجودة نحصل على:

$$x = (20 + 20 - 20)/20 = 1$$

الحل المطلوب هو: $x = 1$، $y = 10$، $z = -20$

التمرين III:

- اختيار المجهول:

ليكن x العدد الأول و y العدد الثاني

- المعادلات:

2 مرة الأول ناقص 3 مرات الثاني يساوي 15 $\qquad 2x - 3y = 15$

4 مرات الأول ناقص 6 مرات الثاني يساوي 45 $\qquad x - 6y = 454$

- **حل النظام (بالإضافة):**

ناقص 2 مرة الأولى يعطي المعادلة

$$-4x + 6y = -30$$

المعادلة الثانية تعطي:

$$4x - 6y = 45$$

بالجمع نجد:

$$y = 15$$

معادلة مستحيلة، لا يوجد حل.

التمرين IV:

- **اختيار المجهول:**

ليكن x عدد معين من ساعات و y المسافة تقاس ب كم بين التقاء. A ونقطة التقاء.

- **وضع معادلات (المسافة = السرعة.الزمن)**

عندما تكون على مفترقات الطرق، والمشاة قد أكملت: x في أول ساعة والمسافة y والنقطة A.

$$y = 6x$$

المسافة الفاصلة بين باء من نقطة الاجتماع الثاني في X هذه المسافة هي y- 12.

لدينا: $12 - y = 4x$
$4x - 6y = 45$

- **حل النظام (بالإضافة):**

الأول يعطي المعادلة:

$$y = 6x$$

المعادلة الثانية تعطي

$$12 - y = 4x$$

بالجمع نجد:

$12 = 10x$ **يعني** $x = 1{،}2h$ **أو** 1h 12mn

وسوف يجتمعون في نهاية 1 ساعة 12 دقيقة، ويمكن حساب مسافة ألف أو باء...

التمرين V:

معين المصفوفة N يساوي

$$a.2b - (-b)(-2a) = 2ab - 2ab = 0$$

مساعد المصفوفة: $N' = \begin{pmatrix} 2b & b \\ 2a & a \end{pmatrix}$

جداء المصفوفتان 'N و N هو:

$$N.N' = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b & b \\ 2a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة ليست عادية لأن المعين يساوي 0، وبالتالي فإن النظام لا يكون لها حل واحد، فإنه من المستحيل أو غير محدد.

المعادلة الثانية: $-2a.x + 2\,b.y = -6$ يمكن كتابتها

$-2(a.x - b.y) = -2.3$ أو (-2) ،$a.x - b.y = 3$،

النظام يتلخص في معادلة واحدة: $a.x - b.y = 3$

التي لها عدد غير منته من الحلول مهما كانت قيمة x.

إذا كان $y = (a.x - 3)/\,b$ ، فإن (x,y) هو حل ل $a.x - b.y = 3$ وللنظام وأيضا حل نظام معادلتان $a.x - b.y = 3$ الذي له عدد غير منته من الحلول لمجهولين:

$-2\,a.x + 2\,b.y = -6;\ x \in IR$ و $y = (a.x - 3)/\,b$

2) نظام المعادلات 2 مع المجهولة 2:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$$

مكتوبة في شكل مصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نضرب أعضاء هذه المعادلة من خلال مصفوفة بالمصفوفة المساعدة:

$$M'=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

للمصفوفة: $$M=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

فنجد: $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

الذي يعطي: $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ وبالتالي: x = -1، y = 1

التمرين VI:

1) نظام المعادلات (1):

$$(1):\begin{cases} 2x+y+3z=a \\ 3x+2y+4z=b \\ x+2y-z=c \end{cases}$$

مكتوب في شكل مصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad A.X=U$$

2) أولا لحل نظام (1):

$$(1):\begin{cases}2x+y+3z=a\\3x+2y+4z=b\\x+2y-z=c\end{cases}$$

نرمز له ب: $(1):\begin{cases}(A'1)\\(B'1)\\(C'1)\end{cases}$ حيث:

(A1) : 2.x + y + 3z = a
(B1) : 3.x + 2y + 4z = b
(C1) : x + 2y - z = c

يستعاض عنها بما يعادل نظم (1)، (1")، (1"') التي حصلت عليها يعادل مجموعات المعادلات الخطية من النظام بحيث في كل مرحلة من مراحل نقلص مجهول من 2 للمعادلات الثلاث وكان على النحو التالي:

$$(1):\begin{cases}2x+y+3z=a\\3x+2y+4z=b\\x+2y-z=c\end{cases}$$

(1) يكافئ

$(1'):\begin{cases}(A'1)\\(B'1)\\(C'1)\end{cases}$ حيث:

(A'1) = (A1): 2.x + y + 3z = a

(B'1) = -(3/2)(A1)+ (B1): (1/2)y - (1/2)z = -(3/2)a+ b

(C'1) = -(1/2) (A1)+(C1): (3/2)y - (5/2)z = -(1/2)a+ c

(1') **يكافئ**: $(1''):\begin{cases}(A'1)\\(B'1)\\(C'1)\end{cases}$

حيث:

$$(A''1) = (A'1)-2(B'1):\ 2.x + 4z = 4a - 2b$$

$$(B''1) = (B'1):\ (1/2)\,y - (1/2)\,z = -(3/2)\,a + b$$

$$(C'1) = -3(B'1)+(C'1):\ - z = 4a - 3b + c$$

$$(1'') \text{ يكافئ } (1''') : (1'''):\begin{cases}(A'''1)\\(B'''1)\\(C'''1)\end{cases}$$

حيث:

$$(A'''1) = (A''1) + 4(C''1) : 2.x = 20a - 14b + 4c$$

$$(B'''1) = (B''1) - (1/2)(C'1) : (1/2)y = -(7/2)a + (5/2)b - (1/2)c$$

$$(C''1) = -3(B'1) + (C'1) : - z = 4a - 3b + c$$

وبالتالي:

$$(2) : \begin{cases}x = 10a - 7b + 2c\\y = -7a + 5b - c\\z = -4a + 3b - c\end{cases}$$

الانتقال من النظم (1)، (1) و (1") على التوالي لنظم (1)، (1") و (1"') ويمكن تحقيق ذلك باستخدام النموذج الحساب.

وبالتالي الانتقال من (1):

$$(1) : \begin{cases}(A1)\\(B1)\\(C1)\end{cases}$$

إلى النظام (1'):

$$(1') : \begin{cases}(A'1)\\(B'1)\\(C'1)\end{cases}$$

حيث:

$$(A'1) = (A1)$$
$$(B'1) = -(3/2)(A1)+ (B1)$$
$$(C'1) = -(1/2)(A1)+(C1)$$

تحسب بضرب أعضاء المصفوفة التالية للنظام (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

من خلال النموذج:

مصفوفة خطية التشكيلات التي هي من حيث معامل المعادلات التي تعطي:

(A'1)، (B'1) et (C'1) بدلالة ((A1)، (B1) et (C1)) أي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

يكافئ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & & \\ \frac{-3}{2}a & + & b \\ \frac{-1}{2}a & + & c \end{pmatrix}$$

وهو شكل المصفوفة للنظام (1').

أيضا ننتقل من النظام:

$$(1'): \begin{cases} (A'1) \\ (B'1) \\ (C'1) \end{cases}$$

إلى النظام:

$$(1''): \begin{cases} (A''1) \\ (B''1) \\ (C''1) \end{cases}$$

حيث:

$$(A''1) = (A'1)-2(B'1)$$
$$(B''1) = (B'1)$$
$$(C'1) = -3(B'1)+(C'1)$$

تحسب بضرب أعضاء المصفوفة التالية للنظام (1'):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ب .}$$

أي:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -\frac{3}{2}a + b \\ -\frac{1}{2}a + c \end{pmatrix}$$

يكافئ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a-2b \\ -\frac{3}{2}a+b \\ 4a-3b+c \end{pmatrix}$$

وهو شكل المصفوفة للنظام (1")

أخيرا ننتقل من النظام:

$$(1'') : \begin{cases} (A''1) \\ (B''1) \\ (C''1) \end{cases}$$

إلى النظام:

$$(1''') : \begin{cases} (A'''1) \\ (B'''1) \\ (C'''1) \end{cases}$$

حيث:

(A'''1) = **(A''1)** + 4**(C''1)**

(B'''1) = **(B''1) -** (1/2) **(C'1)**

(C''1) = -3**(B'1)** + **(C'1)**

تحسب بضرب أعضاء المصفوفة التالية للنظام (1"):

ب: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

أي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4a-2b \\ \frac{3}{2}a+b \\ 4a-3b+c \end{pmatrix}$$

يكافئ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20a-14b+4c \\ -\frac{7}{2}a+\frac{5}{2}b-\frac{1}{2}c \\ 4a-3b+c \end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$(2):\begin{cases} x = 10a-7b+2c \\ y = -7a+5b-c \\ z = 4a+3b-c \end{cases}$$

الفصل الرابع

حساب التكاملات المحددة - الطرق المألوفة للتكامل

مقدمة: هذا الفصل الخاص بحساب التكاملات ضروري في كل مكان تقريبا: في الميكانيكا، لحساب مركز الثقل، وقوة العمل، أو أطوال المجالات، في الكهرباء لحساب أعباء الكهرباء. آخر بالغ الأهمية في تطبيق هذه التكاملات هو سعر المستهلك والمنتج أيضا في التكلفة الحدية ومتوسط التكلفة الأساسية في الاقتصاد.

التكاملات:

ليكن التابع f ذو المتغير الواحد x.

نستخدم (رمز المكاملة) ∫ بمثابة الدالة الأصلية للتابع f.

- **التكامل الغير محدود** $\int f(t)dt = F(x) + C$ يمثل كل التوابع الأصلية ل f(x).
- **التكامل المعرف** $\int_{x0}^{x} f(t)dt = F(x) - F(x0)$ يمثل التابع الأصلي ل f(x).
  الذي ينعدم من أجل x = xo.
- ليكن التابع المستمر f. نقول أن F تابع أصلي لـ . f على المجال [x, x0] إذا كان $F'(t) = f(t)$ مهما كان $t \in [x, x0]$.
- بما أن التكاملات معرفة من خلال التوابع الأصلية، لدينا:

الخصائص الأساسية للتكامل:

- ليكن التابع المستمرf على المجال [a, c] . لدينا:

$$\int_{c}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{b} f(t)dt$$ (علاقة شال)

$$\int_{c}^{b} f(t)dt = -\int_{b}^{a} f(t)dt$$

$$\int_{a}^{b} \beta(t)dt = -\int_{b}^{a} f(t)dt \; ; \; (\beta \in IR).$$

التوابع الأصلية لبعض الدوال الأساسية:

f (x)	F (x) = ∫ f(x)dx	**f (x)**	F (x)
k	k. x + C1	**λx^k**	$\lambda x^{k+1}/k+1$
x^n	**$(x^{n+1}/n+1)$** + C2	**sin x**	- cos x + C4
1/x	Log x + C3	**cos x**	sin x + C5

تطبيقات التكامل في الاقتصاد:

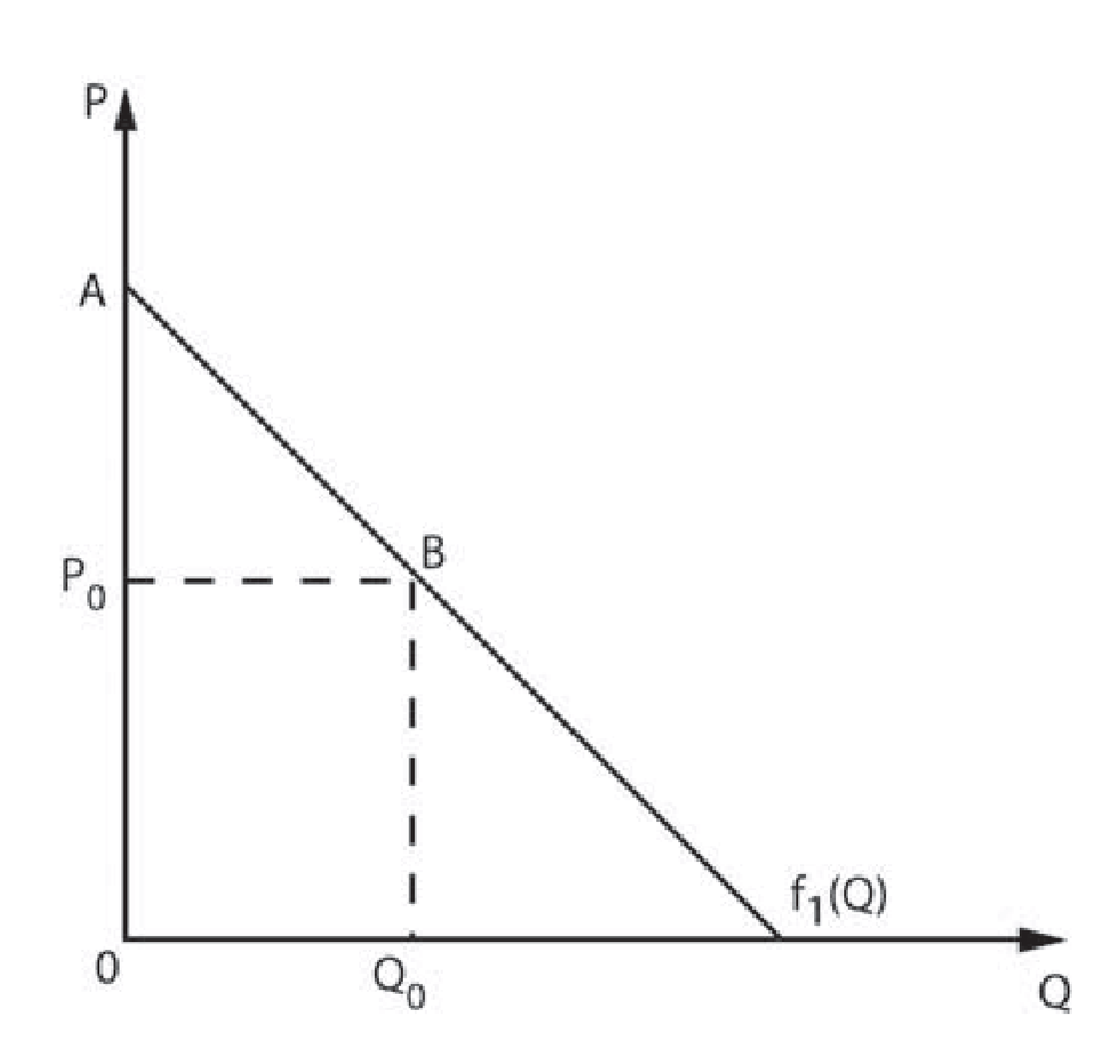
أ) المستهلك وفائض الإنتاج:

هناك توازن في السوق، اذا كانت المساواة بين الكميات المطلوبة Qd مع الكميات المعروضة Qe.

العلاقة بين الطلب والعرض ستتوقف عن بيع كمية محددة من البضائع. في مقابل ذلك يظهر مبلغ العرض الذي تريد المنتجين أو الباعة على بيع كمية محددة من البضائع:

دالة الطلب هي:

$$P1 = f1(Q)$$



الشكل 1: منحنى الطلب من المستهلكين والمنتجين

يبين الرسم البياني الوارد أعلاه مختلف الأسعار بالنسبة للمستهلكين الذين يرغبون في مختلف كميات كبيرة من السلع في حال من التوازن في السوق إذا كانت الكمية متوازنة والأسعار متوازنة.

الرسم البياني يظهر أنه إذا كانت دالة الطلب $Af_1(Q)$ والسعر QP_1 يمكن أن نعرف فائض الإنتاج ب:

دخل المستهلك - القيمة المدفوعة يعني:

$$C.S - QQ_0AB - QQ_0BP_0 + ABP_0$$

$$C.S = \int_0^{Q0} f_1(Q)d(Q) - Q_0P_0$$

وهدا ممثل بالمثلث: ABP_0 .

إذا فرضنا أن دالة الطلب خطية وتساوي $P = \alpha - \beta Q$ فان:

$$QQ_0AB = \int_0^{Q} (\alpha - \beta Q)dQ$$

حيث: $Q = QQ_0$

$$\int_0^Q (\alpha - \beta Q)dQ = \left[\alpha Q^* - \frac{\beta Q^{*2}}{2}\right]$$

لكن:

$$\int_0^Q (\alpha - \beta Q)dQ = \left[\alpha Q^* - \frac{\beta Q^{*2}}{2}\right] = \alpha Q^* - \frac{1}{2}\beta (Q^*)^2$$

يعني:

$$QQ_0AB = \alpha Q^* - \frac{1}{2}\beta (Q^*)^2$$

لكن وعند النقطة B: $P = \alpha - \beta Q$

$$QQ_0AB = (\alpha - \beta Q^*)Q^* = \alpha Q^* - \beta Q^*$$

وبالتالي فائض الاستهلاك هو:

$$C.S = \alpha Q^* - \frac{1}{2}\beta (Q^*)^2 - \alpha Q^* + \beta Q^{*2}$$

$$C.S = \frac{1}{2}\beta (Q^*)^2$$

المثال الرابع. 1: المستهلك وفائض الإنتاج

مثال IV.1.1:

إذا كان تابع الطلب هو $P = 24 - Q - Q^2$، وبافتراض P = 4.
كيفية اختيار المستهلك الفائض.

الحل:

على حساب P = 4 لدينا $4 = 24 - Q - Q^2$: يعني Q = -5 أو Q = 4

قيمة (-5) لا تتوافق، فنأخذ القيمة (4)، والاستعاضة في المعادلة (ب) نحصل على:

C.S = ∫ f(Q)dQ - Q0P0،

$$C.S = \int (24 - Q - Q^2)dQ - (4)(4)$$

C.S = (24Q – (Q 2/2) - (Q 3/3)) – (4) (4) = 66.72

هكذا يتم اختيار المستهلك الفائض.

المثال IV.2: التكلفة الحدية ومتوسط التكلفة:

مثالIV.2.1:

إذا كان (MC) هو التكلفة الحدية لبعض السلع العاشر 0.20 دينار جزائري، والتكلفة الثابتة السنوية 2000 دج.

أبحث عن التكلفة المتوسطة (AC) لهده السلع.

الحل:

من المفترض أن عددا من الوحدات الإنتاجية للسلع هو أن التكلفة الحدية مستمد من مجموع التعاون التقني بالمقارنة مع الوحدات المنتجة للسلع مثل:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 0.20$$

$$TC = \int MCdQ = VC + C = VC + FC \qquad (2)$$

$$\int (0.20)dQ$$

$$= 0.20\int dQ$$

$$TC = (0.20)Q + C$$

هو التكلفة الثابتة فهو ثابت في حالة وجود إنتاج أو لا وجود له

يعني حيث C هو التكلفة الثابتة فهو ثابت في حالة وجود إنتاج أو لا وجود له يعني: Q = 0 عندما C = 2000.

باستبدال C = 2000 في المعادلة (2) نجد:

$$TC = 0.20Q + 2000$$
$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{0.20Q + 2000}{Q} = 0.20 + \frac{2000}{Q}$$
$$TC = BC + FC$$
$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 12e^{0.5Q}$$
$$FC = 36$$
$$TC = \int MCdQ = \int (12e^{0.5Q})dQ$$
$$= 12\frac{1}{0.5}e^{0.5Q} + C$$
$$TC = 24e^{0.5Q} + C$$

إذن التكلفة المتوسطة هي:

$$AC = (TC)/Q = ((0.20)Q + 2000)/Q = 0.20 + (2000/Q).$$

هذه العلاقة عندما تبين أن عددا من الوحدات الإنتاجية للسلع العاشر الزيادات، فإن ذلك يؤدي إلى خفض تكلفة الإنتاج للوحدة الواحدة ونحن نلاحظ أن المعادلة (2) تمثل:

$$TC = VC + FC$$

مثال IV.2.2:

إذا كانت التكلفة الحدية هي:

$MC = (dTC)/dQ = 12\ e^{0.5\ Q}$ و $FC = 36.$

أوجد التكلفة الإجمالية.

الحل:

العثور على مجموع تكلفة، نكامل التكلفة الهامشية على النحو التالي:

$$TC = \int MC\ dQ = \int (12\ e^{0.5\ Q})dQ = 24\ e^{0.5\ Q} + C$$

$FC = TC = 36$ عندما $Q = 0$

بالتعويض: $36 = 24\,e^{0.5\,Q} + C$

حيث: $e^0 = 1$

إذن: $C = 12$

وبالتالي: $TC = 24\,e^{0.5\,Q} + 12$

مثال IV.2.3:

إذا كانت التكلفة الحدية هي:

$$MC = (dTC)/dQ = 25 + 30Q - 9Q^2$$

و $C = FC = 55$

أوجد:

أ) التكلفة الإجمالية (TC)

ب) متوسطة تكلفة (AC)

ج) التكاليف المتغيرة (VC)

الحل:

أ) **العثور على مجموع تكلفة**، تشمل التكلفة الهامشية على النحو التالي:

$$TC = \int MC\,dQ = \int (25 + 30Q - 9Q^2)dQ = 25Q - 15Q^2 - 3Q^3 + C$$

وبما أن: $C = FC = 55$ et $Q = 0$

فان: $TC = FC = 55$

إذن: $TC = 25Q - 15Q^2 - 3Q^3 + 55$

ب) لحساب AC

كما جيم يمثل نسبة التعاون التقني وعدد من الوحدات الإنتاجية، ومن ثم:

$$AC = (TC)/Q = 25 + 15Q - 3Q^2 + (55/Q).$$

ج) **لحساب VC أي حساب الاستثمار الرأسمالي**؛ في الاقتصاد، والمعروف، من خلال ما يلي:

$$TC = FC + VC$$

وبالتالي:

$$VC = TC - FC$$

$$VC = 25Q + 15Q - 3Q^{2}$$

المثال الرابع. 3: الناتج الحدي والناتج المتوسط:

المثال IV.3.1:

إذا كانت دالة الاستيراد الهامشية هي:

$$MR = 20 - 2Q - Q^{2}$$

لذا أوجد:

أ) من مجموع الواردات طن تبريد

ب) الطلب.

الحل:

العثور على استيراد الميزة، فإنه تكامل الدالة هامشية الأهمية على النحو التالي:

$$TC = \int MR\, dQ = \int (20 - 2Q - Q^{2})\, dQ = (20Q - Q^{2} - (1/3)Q^{3}) + C$$

$$C = FC = 55 \text{ et } Q = 0$$

و بما أن: $Q = 0$

فان: $TR = 0$ يعطي C

إذن: $TR = 20Q - Q^{2} - (1/3)Q^{3}$

ب) **للعثور على الطلب**، لدينا:

$$P = AR = (TR)/Q = (20Q - Q^{2} - (1/3)Q^{3})/Q$$

$$P = AR = (20 - Q - (1/3)Q^{2}).$$

تمارين الفصل الرابع

التمرين I: أحسب التكاملات التالية:

a) $\int dx, \int x^{-(1/2)} dx.$

b) $\int (1/3)xdx, \int x^{(1/2)} dx, \int 5x\ dx.$

التمرين II: أحسب التكاملات التالية:

a) $\int_{2}^{4} 7x^5 dx; \quad \int_{-1}^{1} 3x^5 dx$.

b) $\int_{-2}^{2} (3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 5)dx,$

c) $\int_{0}^{1} e^x dx; \quad \int_{0}^{5} 4^x\, dx$

التمرين III:

إذا كان الطلب على السلع الأساسية هي:

$$P = 45 - 0.5\ Q$$

العثور على فائض المستهلك (خدمات العملاء) عند السعر المتوازن يساوي 32.5 وكمية متوازنة 25 = Q0.

التمرين IV:

إذا كان لنا أن دالة التكلفة الحدية لإعطاء هي:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 25 + 20Q - 90^2$$

أوجد:

أ) التكلفة الإجمالية (TC).

ب) متوسطة تكلفة (AC).

ج) التكاليف المتغيرة (VC).

التمرين V:

1) إذا كان الطلب على السلع الأساسية هي $P=(Q+3)^2$

العثور على فائض المنتج إذا كانت التكلفة المتوازنة تساوي $P_0=81$ والكمية المتوازنة هي: $P_0=81$

2) إذا كانت دالة الطلب على السلع الأساسية هي: $P_d=25-Q^2$ ودالة $P_3=2Q+1$

أحسب المستهلك الفائض والمنتج الفائض.

حلول تمارين الفصل الرابع

التمرين I:

a) x + C1; C1 ثابت

$((-1/2)+1)\ x^{-(1/2)+1} = (1/2)x^{(1/2)} + C2;\ C2$:ثابت

b) $(1/3).\ (1/2).\ x^{2} = (1/6)\ x^{2} + C3;\ C3$:ثابت

$(3/2).\ x^{(3/2)} + C4;\ C4$:ثابت

$(5/2).\ x^{2} + C5;\ C5$:ثابت

التمرين II:

a) $\int_{2}^{4} 7x^5 dx - 7.\left(\frac{4^6}{6}-\frac{2^6}{6}\right)-\frac{7}{6}\left(4^6-2^6\right),$

$\int_{-1}^{1} 3x^5 dx = 3.\left(\frac{1^6}{6}-\frac{(-1)^6}{6}\right)=\frac{3}{6}(0)=0$

b) $\int_{-2}^{2}(3x^4+x^3-2x^2+x+5)dx$

$$= \int_{-2}^{2} 3x^4 dx + \int_{-2}^{2} x^3 dx - \int_{-2}^{2} 2x^2 dx + \int_{-2}^{2} x dx + \int_{-2}^{2} 5 dx$$

$$= 3.\left(\frac{2^5}{5}-\frac{(-2)^5}{5}\right)-2.\left(\frac{2^3}{3}-\frac{(-2)^5}{3}\right)+5.(2-(-2))$$

$$= 3.\left(\frac{32}{5}-\frac{-32}{5}\right)-2.\left(\frac{8}{3}-\frac{-8}{3}\right)+5.(2+2)$$

c) $\int_{0}^{1} e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$

$\int_{0}^{5} 4^x dx = \frac{4^5-4^0}{\log 4}$

التمرين III:

انطلاقا من المعادلة التالية:

$$
\begin{aligned}
C.S &= \int_0^{Q_0} f_1(Q)d(Q) - Q_0 P_0 \\
&= \int_0^{25} (45-0.5Q)dQ - (25)(32.5) \\
&= \left[45Q - 0.5\frac{Q2}{2}\right]_0^{25} \\
&= \left[45Q - 0.25Q^2\right]_0^{25} \\
&= \left[45(25) - 0.25(25)^2\right] - [0] - 812.5 \\
&= 1125 - 156.25 - 812.5 \\
&= 1125 - 968.75
\end{aligned}
$$

$$C.S = 156.25$$

وهدا يمثل فائض المستهلك.

التمرين IV:

$$
\begin{aligned}
TS &= \int MCdQ = \int (25 + 30Q - 9Q^2)dQ \\
&= \left[25Q - 15Q^2 - 3Q^3\right] + C
\end{aligned}
$$

$$TC = 25Q - 15Q^2 - 3Q^3 + C$$

وبما أن: $Q-0 \quad et \quad C-FC-55$

إذن: $TC = FC = 55$

وبالتالي: $TC = 25Q - 15Q^2 - 3Q^3 + 55$

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{25Q - 15Q^2 - 3Q^3 + 55}{Q}$$

$$25 + 15Q - 3Q^3 + \frac{55}{0}$$

لحساب VC:

لدينا:

$$TC = FC + VC$$

$$VC = TC - FC$$

$$VC = 25Q - 15Q^2 - 3Q3^3$$

التمرين V:

1) انطلاقا من المعادلة التالية:

$$P.S = Q_0 P_0 - \int_0^{Q0} f_2(Q) d(Q)$$

$$= (6)(81) \int_0^6 (Q+3)^2 dQ$$

$$= 486 - \left[\frac{(Q+3)}{3} \right]^3$$

$$= 486 - \left[\frac{1}{3}(Q+3)^3 \right]_0^6$$

$$= 486 - \left[\frac{1}{3}(6+3)^3 - \frac{1}{3}(0-3)^3 \right]$$

$$= 486 - 243 - 9$$

$$= 486 - 234$$

$$P.S = 252$$

2) نحسب التكلفة المتوازنة والكمية المتوازنة:

نعلم أن السوق: $Q_S = Q_d$

وبالتالي:

$$2Q + 1 = 25 - Q^2$$
$$2Q + Q^2 - 25 = 0$$

لحساب الكمية المتوازنة:

$$(Q+6)(Q-4) = 0$$

يعني نأخذ الكمية المتوازنة: $Q_0 = 4$

ونرفض: $Q = -6$

ولحساب التكلفة المتوازنة من أجل: $Q_0 = 4$

لدينا:

$$P = 25 - Q_2$$
$$= 25 - (4)^2$$
$$= 25 - 16$$
$$P = 9$$

وباستخدام المعادلة التالية:

$$C.S = \int_0^{Q_0} f(Q)d(Q) - Q_0 P_0$$
$$= \int_0^4 f(25 - Q^2)dQ - (9)(4)$$
$$= \left[25Q - \frac{Q_3}{3} \right]_0^4$$
$$= \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3 \right]_0^4 - 36$$

$$= \left[25Q - \frac{1}{3}(0)^3 \right] - \left[25(0) - \frac{1}{3}(0)^3 \right] - 36$$

$$= [100 - 21.33] - 36$$

$$= 78.67 - 36$$

$$= 42.67$$

ولحساب فائض المنتج نستخدم المعادلة التالية:

$$P.S = Q_0 P_0 - \int_0^{Q_0} f(Q) d(Q)$$

$$= (4)(9) - \int_0^4 (2Q + 1) dQ$$

$$= 36 - \left[\frac{2Q^2}{2} + Q \right]_0^4$$

$$= 36 - \left[Q^2 + Q \right]_0^4$$

$$= 36 - \left[(4)^2 + (4) \right] - [0]$$

$$= 36 - [16 + (4)]$$

$$= 36 - 20$$

وهدا يمثل فائض المنت:

$$P.S = 16$$

نصوص المسائل

المسألة الأولى:

في شركة، ورشة العمل لها إنتاج حيث التكاليف المتغيرة تتناسب مع النشاط التي حددها عدد من الوحدات المنتجة.

التكاليف الثابتة = 6000 دج،

التكاليف المتغيرة لـ . 400 وحدة = 8000 دج.

التكاليف الشبه متغيرة هي:

من أجل إنتاج		
وحدة 600	وحدة 500	وحدة400
2 250	2 125	2 000

1- حدد بطريقة أعباء بيانية الجزء المتغير والجزء الثابت للتكاليف الشبه متغيرة.

2- بين في جدول من أجل الإنتاج 400، 500 و 600 وحدة:

- التكاليف المتغيرة الإجمالية والوحدوية؛
- التكاليف الثابتة الإجمالية والوحدوية؛
- التكاليف المجموع الإجمالية والوحدوية.

3- وضح بمعادلات وإشكال بيانية لنفس هذا الإنتاج 400 من أجل 500 و 600 وحدة، الخاصة ب:

- التكاليف المتغيرة الإجمالية؛
- التكاليف المتغيرة الوحدوية؛
- مجمل التكاليف الثابتة؛
- التكاليف الثابتة الوحدوية.

إنتاج أكثر من 600 وحدة يفرض على شركة لمواد أولية التمديد. وهناك أكثر من 1000 من إنتاج الشركة لوحدات التمديد الثاني. استثمارات جديدة تؤدي إلى زيادة التكاليف الثابتة.

هذه التكاليف، وبعد الأعباء في ضوء الدور **التكاليف شبه المتغيرة** لأجزاء متغيرة وأجزاء ثابتة هي، عموما، على ما يلي:

التكاليف	**من أجل إنتاج**			
	وحدة800	حدة 1000	وحدة 1200	وحدة 1500
التكاليف المتغيرة	17 000	21 250	25 500	31 875
التكاليف الثابتة	12 500	12 500	18 750	18 750
التكاليف الكلية	29 500	33 570	44 250	50 625

4- مثل على نفس الرسم البياني (للمنتجات تتراوح من 400 إلى 1500وحدة):

- التكاليف المتغيرة الإجمالية؛
- التكاليف الثابتة الإجمالية؛
- تكاليف المجموع الإجمالية.

المسألة الثانية:

تغيرات الأعباء الخطية - معادلات وأعباء بيانية:

في الأعمال سوى نوع واحد من المنتجات، من أعباء الدراسة لمختلف مستويات النشاط ويؤدي إلى ما يلي:

مستوى النشا ط:

النفقات	1 000	2000	3 000	4 000
مصاريف الإستغلال	2000 000	4 000 000	6 000 000	8 000 000
أعباء هيكلية	5000 000	5 000 000	5 000 000	5 000 000
اعباء شبه متغيرة	2000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000

العمل المطلوب:

علما أن تغييرات الأعباء خطية؛

1) وضح لكل من الفئات الثلاث من التكاليف:

- معادلات التكاليف،
- وحدة معادلة الأعباء الوحدوية.

2) أجمع الأعباء إلى نوعين:

- التكاليف المتغيرة في المعادلة، ومعادلة الوحدة المتغير. عرض الأعباء البيانية.
- المعادلة الثابتة ومعادلة وحدة ثابتة. عرض الأعباء البيانية.

3) وضح التكلفة الإجمالية لهذه المعادلة والمعادلة من متوسط التكلفة. عرض الأعباء البيانية.

4) في حال حدوث زيادة في نشاط لإنتاج أكثر من 000 4 وحدات، ويعتبر التغيير الهيكلي مما يؤدي إلى زيادة التكاليف الثابتة (بما في ذلك تلك الواردة في الأعباء شبه المتغيرة) ب 50 ٪.

ماذا يحدث لأعباء بيانية ومعادلات المقررة في الثاني والثالث من أسئلة؟

المسألة الثالثة: توزيع غير المباشر بين مراكز التحليل:

الشركة وضعت مجموعة من المعاملات التقنية الرئيسية المقابلة للتوزيع غير المباشر بين مراكز التحليل:

المراكز الرئيسية			المراكز الفرعية		
التوزيع	الإنتاج	التموين	تسيير المعدات	إدارة	
10،0	30،0	05،0	05،0	50،0	610
05،0	05،0	05،0	05،0	80،0	620
10،0	30،0	10،0	45،0	05،0	630
60،0	0'1O	20،0	-	10،0	640
40،0	10،0	10،0	-	40،0	606
30،0	30،0	20،0	10،0	10،0	650
05،0	80،0	05،0	05،0	05،0	681

لشهر يناير، القسمة الموزعة تبين المبالغ التالية بآلاف دينار:

حسابات 610: 200 3؛

حسابات 620: 600؛

حسابات 630: 800؛

حسابات 640: 390؛

حسابات 606: 350؛

حسابات 650: 200؛

حسابات 681: 580.

العمل المطلوب:

1) إعطاء مصفوفة تمثيل لحساب التوزيع.

2) حساب التوزيع.

المسألة الرابعة: إحصاءات الأسعار والتكاليف:

أ) شركة تقوم بتصنيع منتجات أربعة:

المنتج A1 والتي تقاس بآلاف الأجزاء المصنعة.
المنتج A2 والتي تقاس بآلاف الأجزاء المصنعة.
المنتج A3 والذي يقاس بالطن
المنتج A4 والذي يقاس بالطن

ولتصنيع هذه المنتجات، وهي الشركة M2 وM1 (بالطن)، من تستخدم خامات الكهرباء (بكيلووات ساعة)، اليد العاملة (ساعة عمل). وهكذا، **فإن وحدة إنتاج 1** تطلب:

300 كيلو وات ساعة، 50 M2(بالطن) هو 1، طلب M1 هو 3 طن ساعة عمل، وإنتاج وحدة **فان وحدة إنتاج A2** تطلب:

500 كيلو وات ساعة، 30ساعة هو عمل M1 طن من M1 ولإنتاج وحدة **فإن وحدة إنتاج A3** تطلب:

1000كيلو وات ساعة،40 ساعة M2 من العمل هو0، طلب 4 طن من M1 وإنتاج وحدة **فان وحدة إنتاج A4** تطلب:

600 كيلو وات ساعة، 40 ساعة من العمل، 4 من أطنان M2 و 2 طن من M1.

العمل المطلوب:

مثل المصفوفة للمعاملات التقنية (المنتج: عوامل الأعمدة).

ب) أسعار العوامل هي:

تكاليف M1 هي 800 دج للطن الواحد.
تكاليف M2 هي 3000 دج للطن الواحد.

0.4 دج لكل كيلووات ساعة التكلفة،

15 دج لكل ساعة عمل التكاليف.

العمل المطلوب:

1) مثل شعاع السعر.

باستخدام المصفوفة أحسب تكاليف الوحدة من المنتجاتA3، A2، A1 وA4

ج) الشركة تريد إنتاج 200 قطعة من 300 من A4 و 800 طن من A3، 80 قطعة من A2.

العمل المطلوب:

1) باستخدام مصفوفة العوامل أحسب كميات المستهلكة.
2) تحديد التكلفة الإجمالية لكل نوع من المنتجات.
3) تحديد باستخدام الأشعة التكلفة الإجمالية للشركة.

المسألة الخامسة: الخدمات المتبادلة بين المراكز المساعدة:

مساعد مركز يمكن أن تحصل على مركز خدمات أخرى مساعدة نفسها التي توفر هذه الخدمة. وهذا ما يسمى عبر نقل أو المنافع المتبادلة.

إننا قادرون على حل المسألة بالطريقة الجبرية، وهي نظام المعادلات مع عدد غير معروف معادلات من الدرجة الأولى N مراكز تقديم الخدمات المتبادلة، إذن يوجد نظام N يعكس خدمة متبادلة إذ وجد.

العمل المطلوب هو: حل لهذا النظام، وتطبيق مبادئ حساب مصفوفة.

في شركة، اثنين من المراكز المساعدة صيانة و الطاقة لهم المنافع المتبادلة.

في توزيع أولي للتكاليف الغير مباشرة يوفر المعلومات التالية:

مجموع المراكز	المراكز المساعدة			
	الطاقة	الصيانة	المبلغ	**التكاليف غير مباشرة**
036078	80625	12 852	454 257	**المجموع 1 بعد التوزيع**

وخلال هذه الفترة، سجل مركز الصيانة 1200 ساعة من اليد العاملة المباشرة والطاقة المركزية 000، 180 كيلووات/ساعة.

صيانة المركز تلقت 0 2250 كيلووات/ساعة من مركز للطاقة ومركز الطاقة تلقى 200 ساعة من اليد العاملة من مركز الصيانة.

أ) أعرض الحساب الجبري للخدمات المتبادلة بين هذين المركزين المساعدين.
ب) أعرض جدول التكاليف الغير مباشرة بعد توزيع الثانوي.

في مؤسسة وبعد التوزيع الأولي للمصاريف غير المباشرة، فإن تكاليف تحليل المراكز هي على النحو التالي:

- **المراكز المساعدة:**

إدارة 16530
صيانة 42600

- **أهم المراكز:**

التموين 35630
وحدات العمل يتم اختيارها:

- وبالنسبة لمركز التموين: كيلوغرام من المواد الأولية المشتراة.
- للتصنيع: كيلوغرام من المواد الأولية المستهلكة.
- للتركيب: الساعة/ آلة.

- وبالنسبة لمركز توزيع: 100 دج من رقم الأعمال فإن المراكز المساعدة بالنسبة المئوية تكون كما يلي:

المراكز	الإدارة	صيانة	تموين	التصنيع	التركيب	التوزيع
الإدارة		10	10	40	30	10
الصيانة	10		10	40	40	

خلال الفترة:

- المدخلات كانت تقدر ب 16880 كيلوغرام من المواد الأولية،
- ورشة التصنيع استعملت 14.095 كيلوغرام من المواد الأولية،
- عدد ساعات اليد العاملة التي بلغت 5415 عامل في ورشة التركيب.
- قيمة المبيعات ارتفعت إلى 575،000 ف.

أ) حساب الخدمات المتبادلة بين المراكز المساعدة.

ب) عرض الجدول النهائي لتوزيع التكاليف غير المباشرة.

ج) تحديد تكلفة ونتيجة للطلبية رقم 512 المسعرة ب 60000 دج.

هذه الطلبية المتمومة استهلكت خلال الفترة 1250 كيلوغرام من المادة الأولية بسعر شراء و 18/كغ و 620 ساعة من اليد العاملة ب 36 ساعة (من ضمنها 200 ساعة في ورشة التصنيع و 420 في ورشة التركيب).

وتبلغ التكلفة الإجمالية للصناعة (بالسنتيم) وترتبط الكمية المنتجة.

المسألة السادسة:

نعتبر شركة تنتج منتوج A التكلفة الكلية للإنتاج (بالسنتيم) هي متعلقة بالكمية المنتجة (بالطن) ممثلة بالعلاقة:

$$C(q) = q^3 - 6q^2 + 24q$$

العمل المطلوب هو:

التكلفة Cm(q) والتكلفة المتوسطة لكل وحدة من الإنتاج Cu(q).

أ) 1) أحسب بدلالة q الحدية من الإنتاج.

2) ما هو الإنتاج q0 الذي من أجله تكون تكلفة الإنتاج لكل وحدة لها حد أدنى.
برهن أن $Cu(q) = Cm(q)$ ثم عمم هده النتيجة.

3) وضع على نفس الرسم البياني الذي يمثل منحنيات Cm(q) و Cm(q) من أجل $0 \leq q \leq 5$.

4) إعطاء تفسير البيانية النتيجة.

ب) 1) ومن المفترض أن تكون هذه الشركة الكمال، وسعر السوق للوحدة التابعة ل A هو p=24.

2) برهن إلى أن أرباح الشركة يمكن التعبير عنها، وهذا على يتوقف على كمية إنتاج جيد ل . q في ظل الصيغ التالية:

$$B(q)=q(p-Cu(q)) \qquad (1)$$

$$B(q)=\int_0^q (p-Cm(x))dx \qquad (2)$$

3) ما هو الإنتاج QM الذي من أجله يكون حد أقصى للأرباح التكلفة برهن أنه من أجل q=qM الحدبة تساوي p.

4) برهن أن المساواة بين كل من العبارتين ل . B(q) يترجم بمساواة المساحتين على الرسم البياني الانحياز ألف (3).
عرف هذين المجالين من أجل q=qM.

ج) 1) ومن المفترض الآن أن إنتاج الشركة من التأثير في السوق، وأنه سعر الوحدة من ألف جيدا ف . المرتبطة به قانون الطلب p(q)=32-q

2) حدد بدلالة p وفقا لأرباح الشركة.

3) ما هي كمية q "الأمثل" الإنتاج لتحقيق أقصى قدر من الربح.

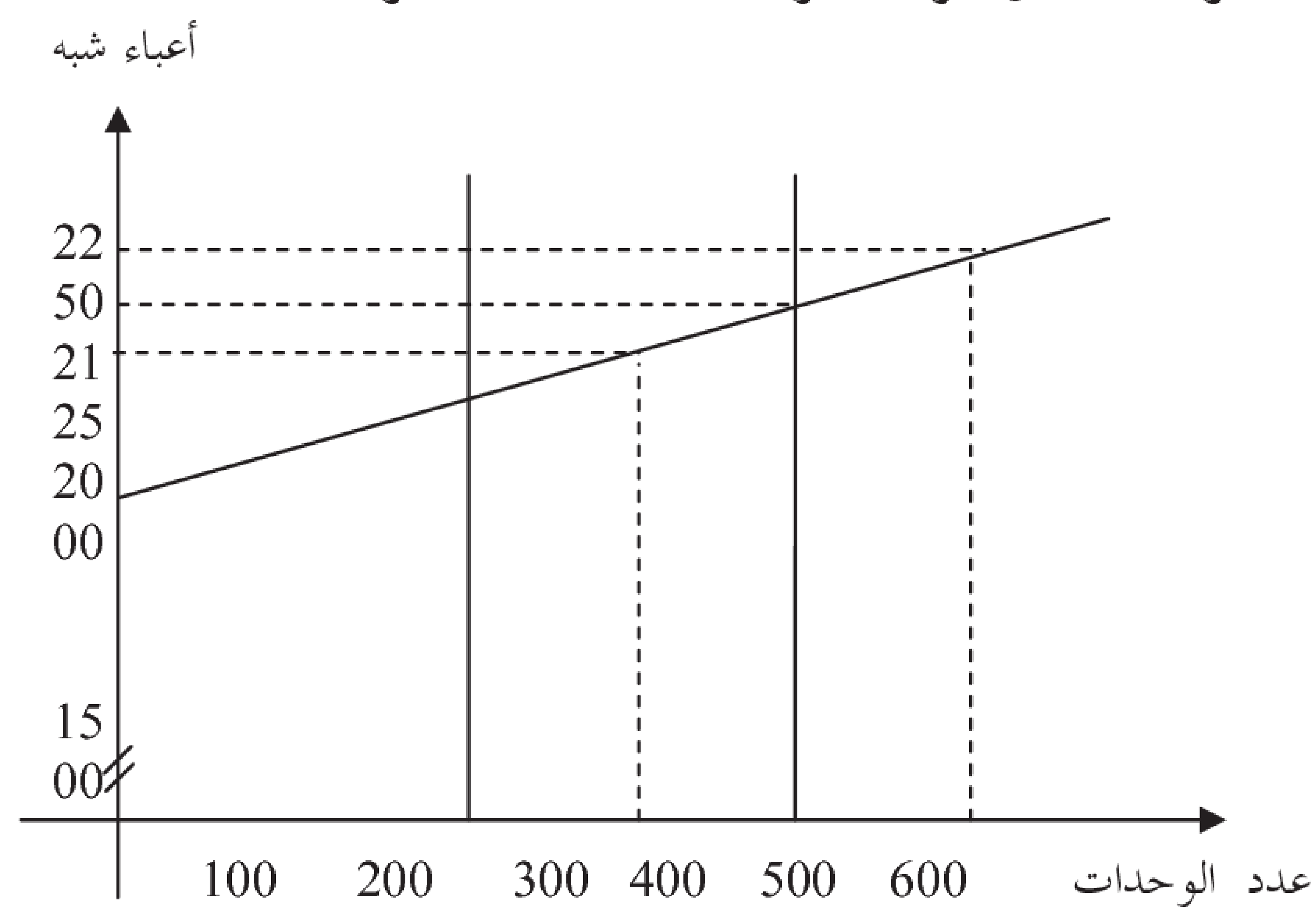
4) احسب مرونة Eq/q الطلب بالنسبة إلى الأسعار.

حلول المسائل

المسألة الأولى:

التكاليف المتغيرة والثابتة:

الجزء الثابت والجزء المتغير للتكاليف الشبه متغيرة:

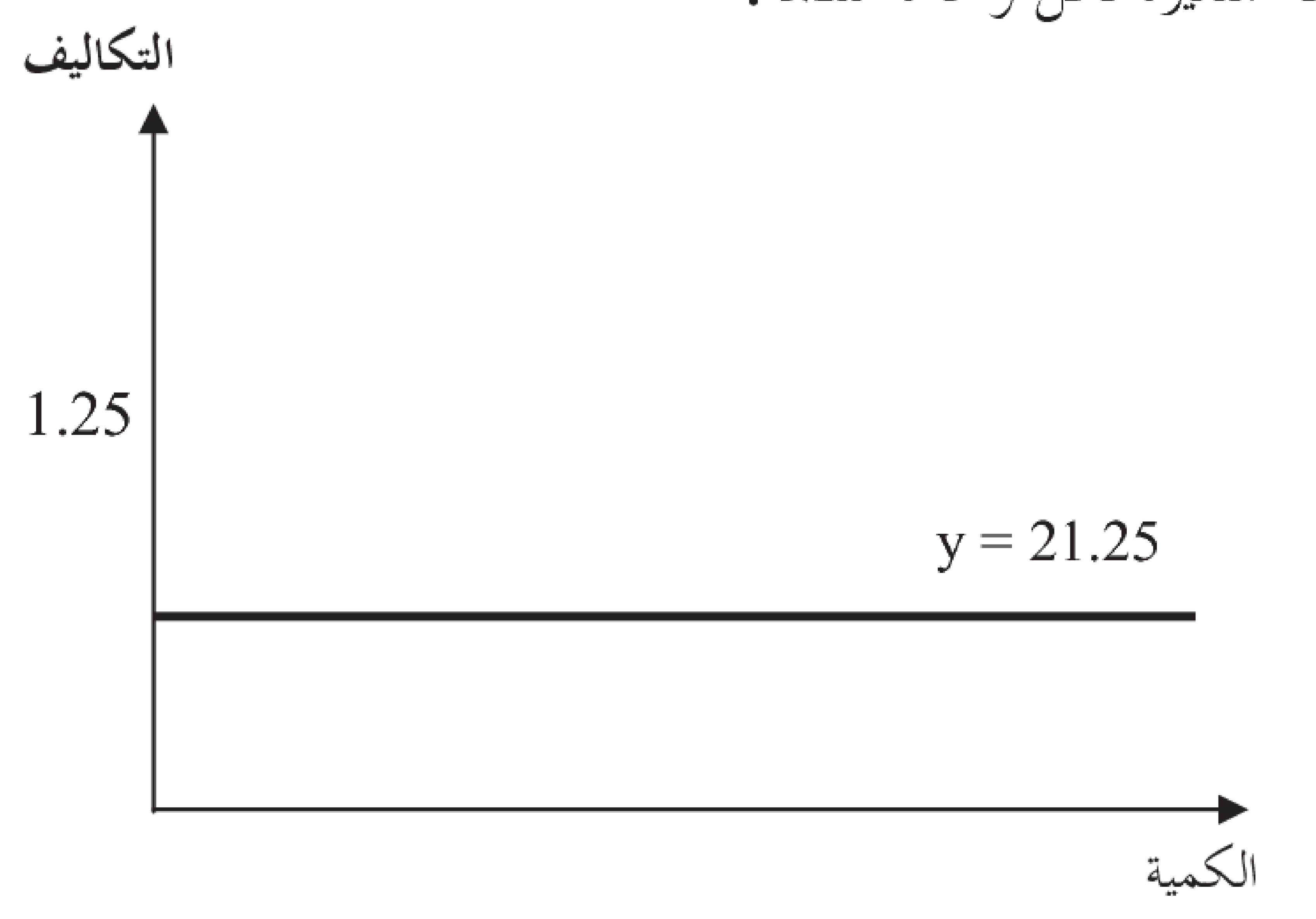


الرسم البياني **للتكاليف الشبه متغيرة** يبين أنه عبارة عن دالة خطية من النوع $y = ax + b$. لأن النقاط الثلاث $x = 400$، $x = 500$ et $x = 600$ على استقامة واحدة.

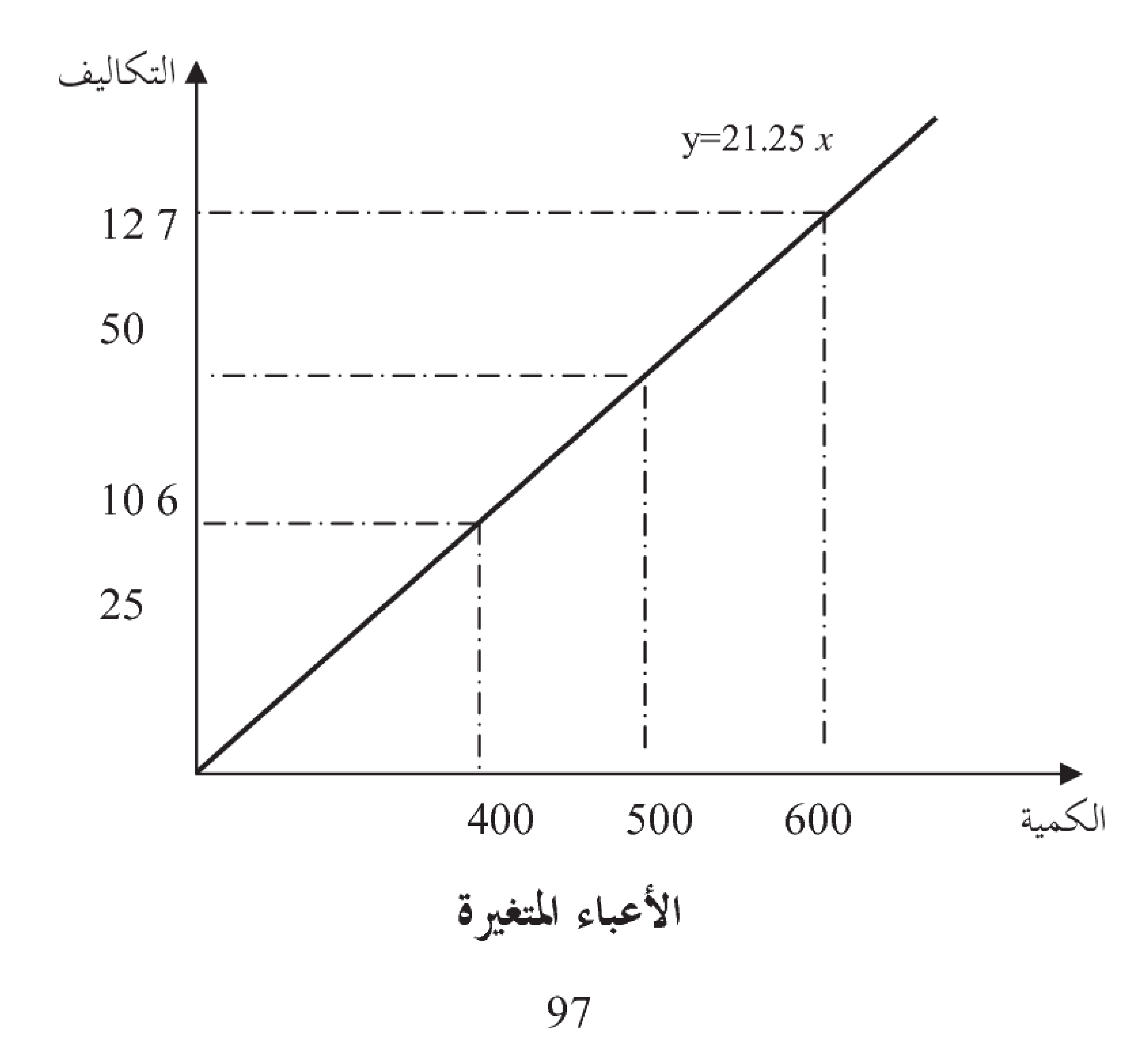
إيجاد المعادلة:

$$(1) \quad 2\,000 = 400\,a + b$$
$$(2) \quad 2\,250 = 600\,a + b$$
$$(2)-(1) \quad 250 = 200\,a$$
$$a = 1.25$$
$$(1) \quad b = 2000 - 400 \times 1.25$$
$$b = 1\,500$$

500 دج والتكاليف الشبه متغيرة ستشمل 11.25 من النفقات الثابتة التكلفة المتغيرة لكل وحدة منتجة.



العبء المتغير الوحدوي

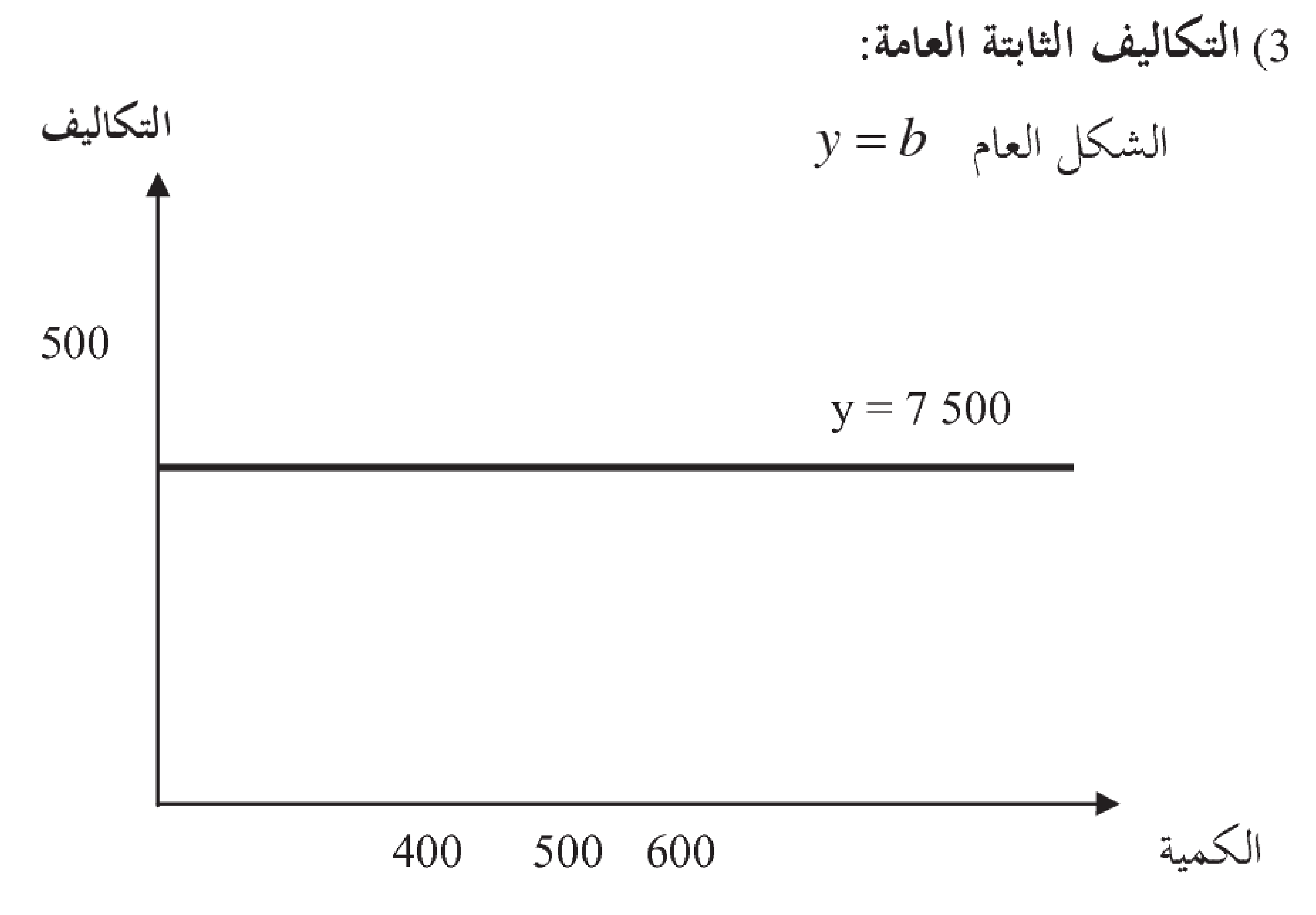


الأعباء المتغيرة

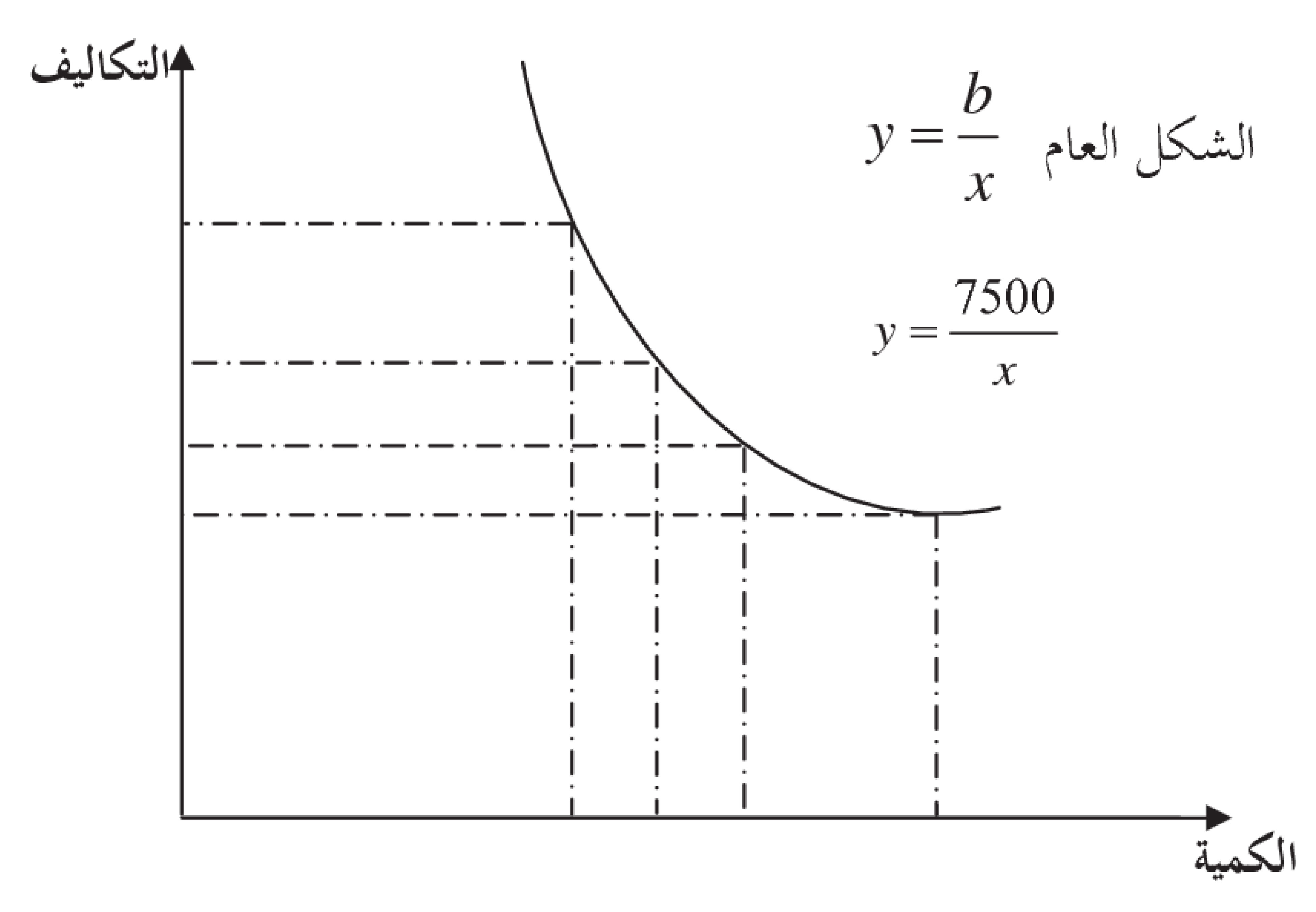
جدول الأعباء:

التكاليف	من أجل انتاج 600		500		400	
	الوحدوية	الإجمالية	الوحدوية	الإجمالية	الوحدوية	الإجمالية
التكاليف المتغيرة	20	12 000	20	10 000	20	8000
الجزء المتغير للتكاليف شبه متغيرة	1.25	750	1.25	625	1.25	500
التكاليف المتغيرة	21.25	12750	21.25	10625	21.25	8500
التكاليف الثابتة	10	6000	12	6000	15	6000
الجزء الثابت للتكاليف شبه متغيرة	2.50	1500	3	1500	3.75	1500
مجموع التكاليف الثابتة	12.50	7500	15	7500	18.75	7500
التكاليف مجموع	33.75	20 250	36.25	18125	40	16000

3) **التكاليف الثابتة العامة:**

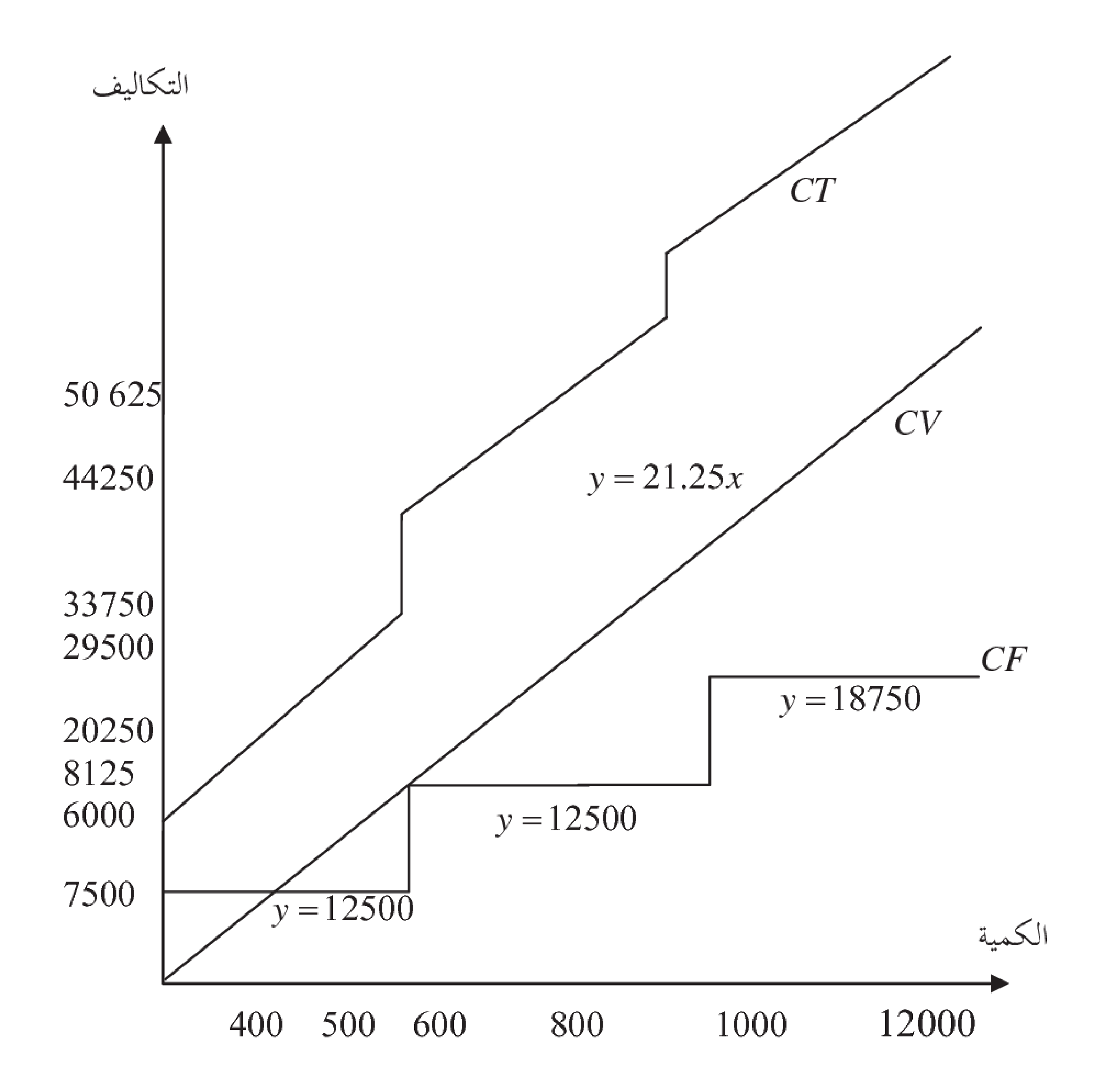


تكاليف الوحدة الثابتة



كلما زاد الإنتاج كلما انخفض العبء الثابت الواحد.

4. الأعباء والتغييرات الهيكلية:



المسألة الثانية:

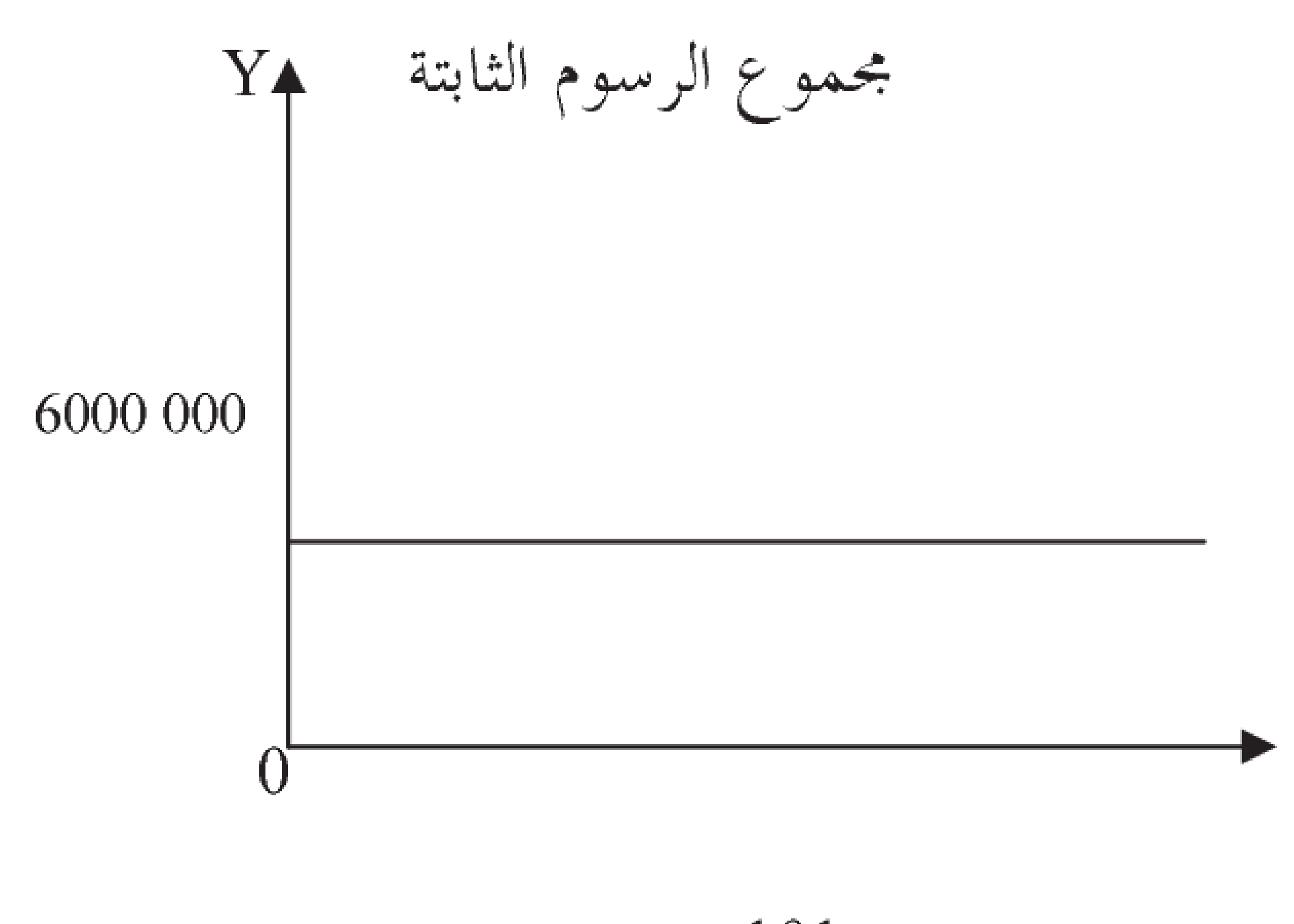
1) **معادلة الفئات الثلاث:**

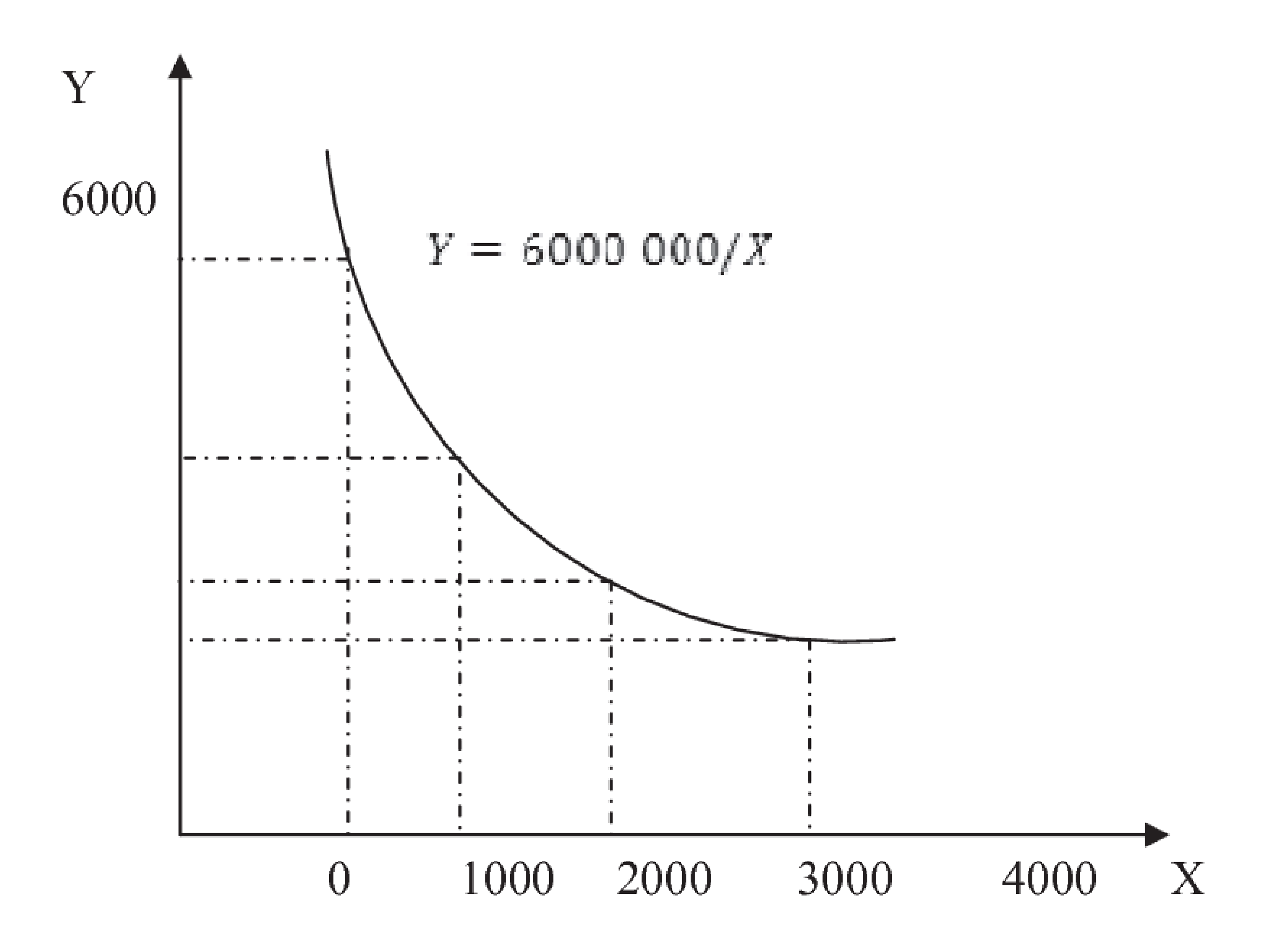
	مجموع الأعباء	أعباء الوحدة
مصروفات التشغيل	$y = 2000x$	$y = 2000$
حساب هيكل...	$y = 5\ 000\ 000$	$y = 5\ 000\ 000 / x$
نفقات متنوعة	$y = 100\ \ x + 1000\ 000$	$y = \frac{1000x + 1\ 000\ 000}{x}$

التجميع إلى فيئتين

	مجموع الأعباء	أعباء الوحدة
مصروفات التشغيل.......	$y = 3000\ \ x$	$y = 3000$
حساب هيكل.........	$y = 600\ 000$	$y = 6000\ 000 / x$

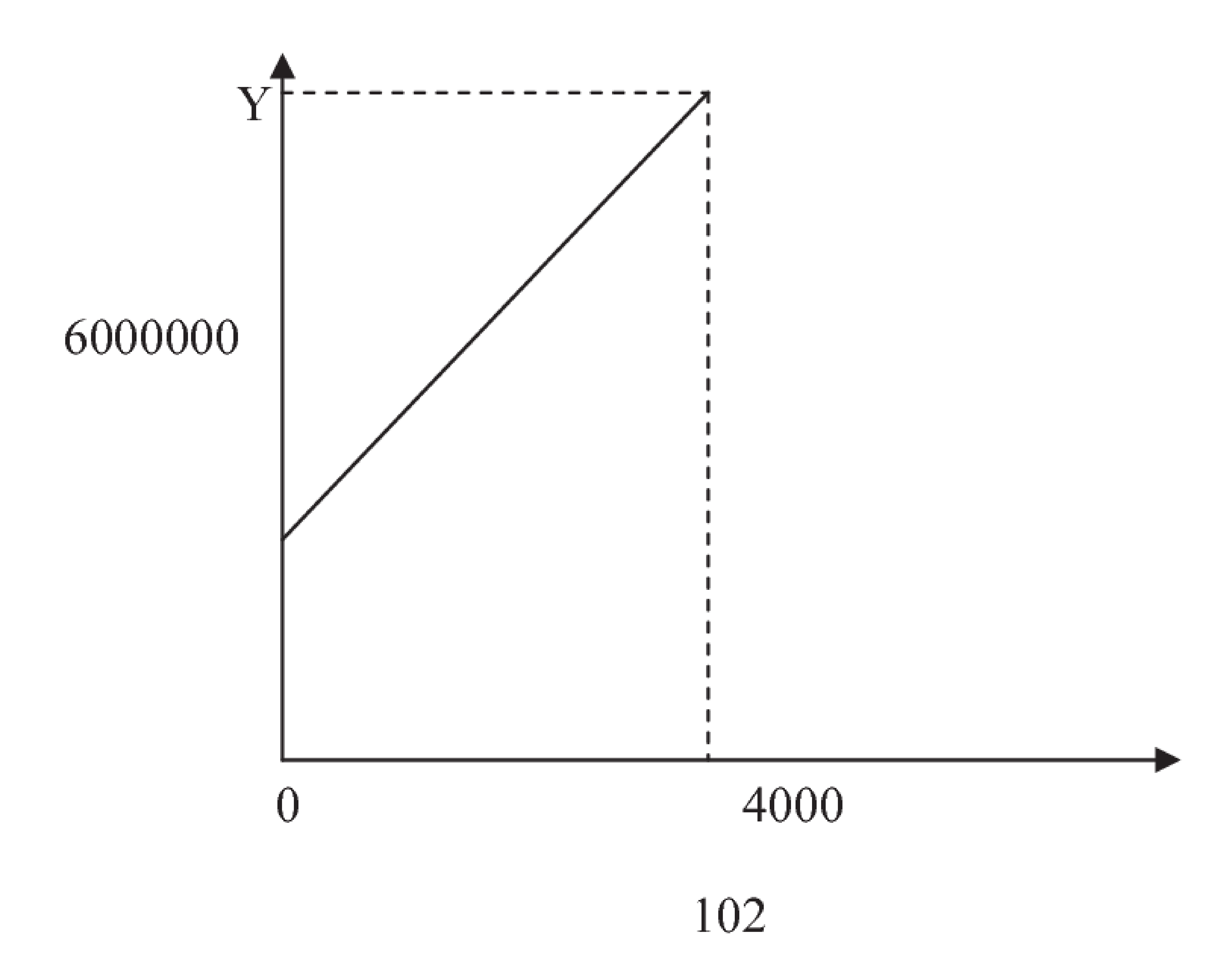
التكاليف الثابتة





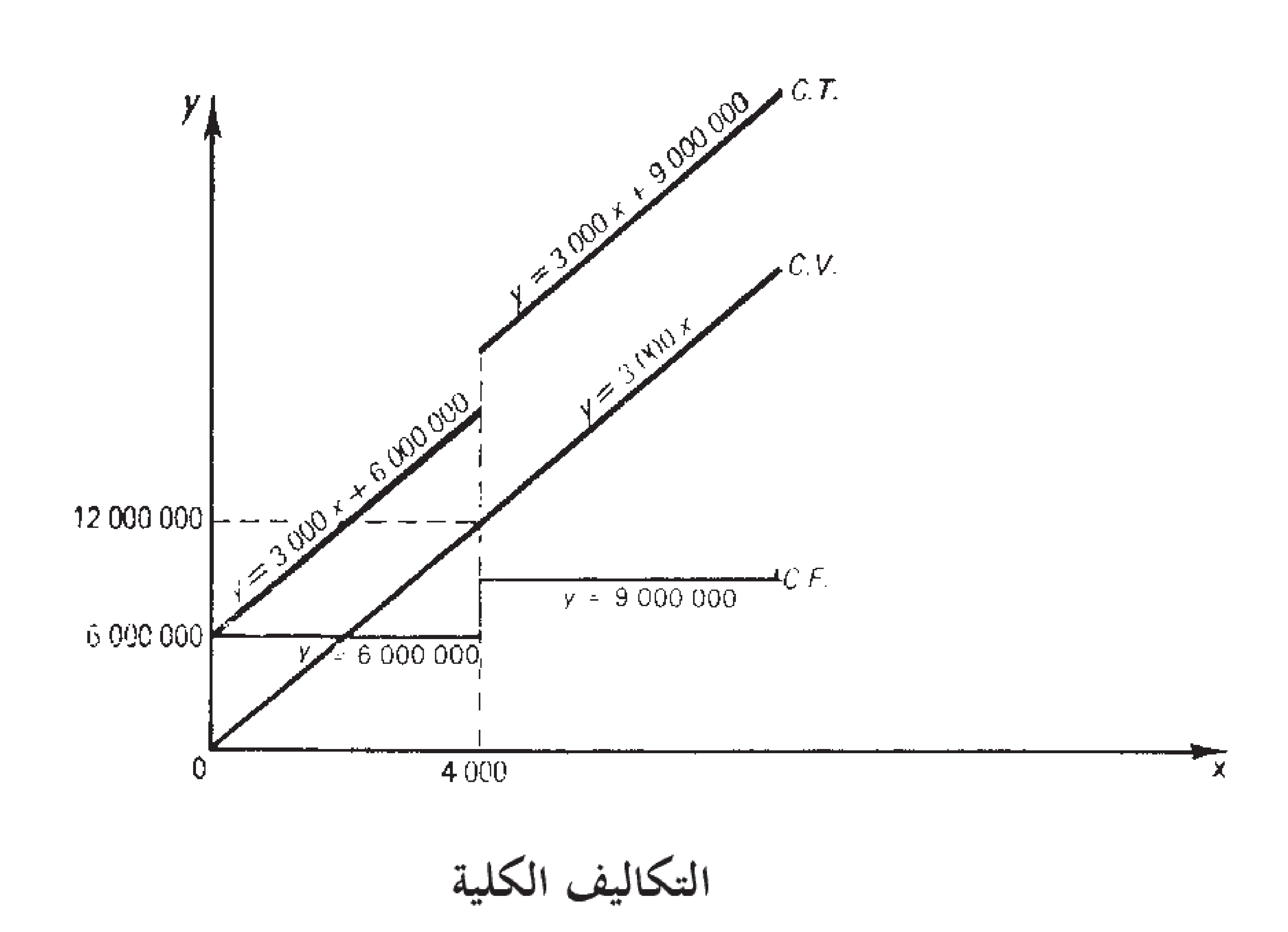
التكلفة الكلية والتكلفة المتوسطة

التكلفة الكلية:



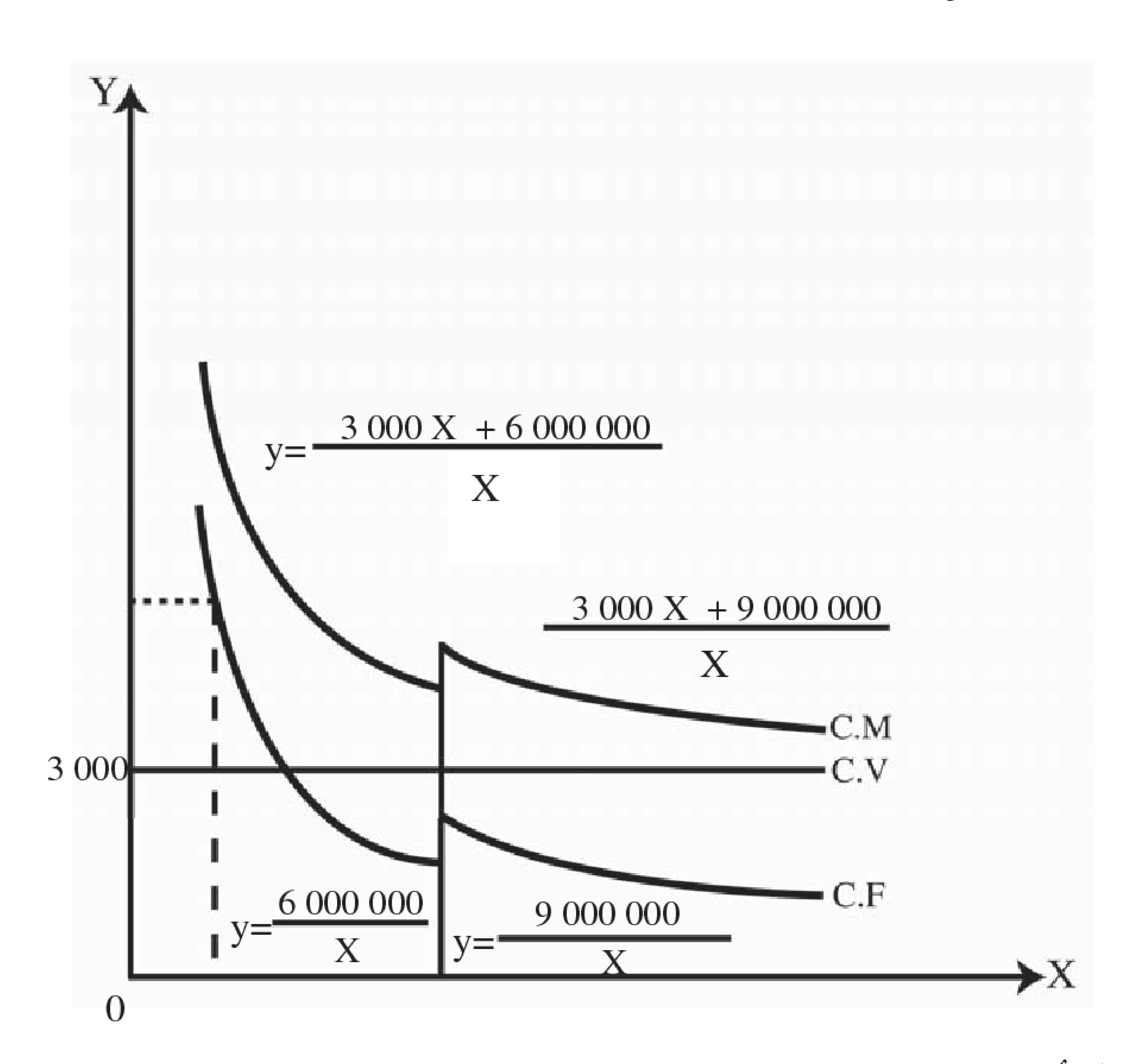
التكلفة المتوسطة : $y = \dfrac{3000x + 6\ 000\ 000}{x}$

تغيير الهيكل:



التكاليف الكلية

التكاليف الوحدوية:



المسألة الثالثة :

1) **مصفوفة التمثيل لحساب التوزيع:**

ليكن:

شعاع التكاليفV

مصفوفة المعاملاتM

شعاع مجاميع المراكزS

حيث: $V = (3200,\ 600,\ 800,\ 390,\ 350,\ 200,\ 580)$

و

$$M=\begin{pmatrix} 0,50 & 0,05 & 0,05 & 0,30 & 0,10 \\ 0,80 & 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,45 & 0,10 & 0,30 & 0,10 \\ 0,10 & 0 & 0,20 & 0,10 & 0,60 \\ 0,40 & 0 & 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,30 & 0,30 \\ 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,80 & 0,05 \end{pmatrix}$$

2) **حساب التوزيع:**

لنحسب S

							0,50	0,05	0,05	0,30	0,10
							0,80	0,05	0,05	0,05	0,05
							0,05	0,45	0,10	0,30	0,10
							0,10	0	0,20	0,10	0,60
							0,40	0	0,10	0,10	0,40
							0,10	0,10	0,20	0,30	0,30
							0,05	0,05	0,05	0,80	0,05
V	3 200	600	800	390	350	200	580	2 348	599	452	1 828	893 S
								G.P.	G.B.	A.P	Pr.	Di.

المسألة الرابعة:

أ. مصفوفة معاملات التقنية:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 300 & 50 \\ 2 & 1 & 500 & 30 \\ 4 & 0 & 1000 & 40 \\ 2 & 4 & 600 & 40 \end{pmatrix}$$

ب. شعاع الأسعار:

تكلفة الوحدة:

$$MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 300 & 50 \\ 2 & 1 & 500 & 30 \\ 4 & 0 & 1000 & 40 \\ 2 & 4 & 600 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 3\,000 \\ 0.4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,270 \\ 5\,250 \\ 4\,200 \\ 14\,440 \end{pmatrix}$$

ج)1) كميات كبيرة من العوامل التي تستهلك:

$Q = (200، 80، 800، 300)$: أشعة المنتجات

$$QM = (200، 80، 800، 300) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 300 & 50 \\ 2 & 1 & 500 & 30 \\ 4 & 0 & 1000 & 40 \\ 2 & 4 & 600 & 40 \end{pmatrix}$$

$$= (4\,560، 1\,480، 1\,080\,000، 56\,400)$$

1) **مجموع التكلفة وفقا لنوع المنتج:**

$$\begin{pmatrix} A_1 : 200x6270 & = 1254000 \\ A_2 : 8x5250 & = 420000 \\ A_3 : 800x4200 & = 3360000 \\ A_4 : 300x414440 & = 4332000 \end{pmatrix}$$

التكلفة العامة:

الطريقة الأولى:

$$(200 \quad 80 \quad 800 \quad 300) \begin{pmatrix} 6\,270 \\ 5\,250 \\ 4\,200 \\ 14\,440 \end{pmatrix} = 9\,366\,000$$

الطريقة الثانية:

$$(4\,560 \quad 1480 \quad 1080\,000 \quad 56\,400)\begin{pmatrix} 800 \\ 3\,000 \\ 0.4 \\ 15 \end{pmatrix} = 9\,366\,000$$

المسألة الخامسة:

1– أ) المحافظة على المركز يستقبل (1/8) لمركز الطاقة (22500 كيلووات/ساعة على ما مجموعه 180000). ويتلقى المركز مقابلة (1/6) لمركز الطاقة (200 ساعة على ما مجموعه 1200).

ليكن x تكلفة مركز الصيانة
وليكن yx تكلفة مركز الطاقة
(لتكن الأولية بعد توزيع الأعباء والفوائد التي تجنى منها.)

$$\begin{cases} x = 12\,852 + \frac{1}{8}\ y \ \ (1) \\ y = 80\,625 + \frac{1}{6}\,x \ \ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 102\,816 + \ y \ \ (1) \\ -\frac{1}{6}\,x = 80\,625 - y \ \ (2) \end{cases}$$

$$\frac{47}{6}x = 183\,441$$

$$x = 23\,418$$

$$y = 84\,528$$

ب) جدول تقاسم الأعباء بعد التوزيع الثانوي:

التكاليف الغير مباشرة	المراكز المساعدة		
	الصيانة	الطاقة	
مجموع 1 بعد التوزيع مركز الصيانة مركز الطاقة	12 852 - 23 418 + 10 566 (1)	80 + 3 903 (3) - 84 528	360 780 19 515 (4) 73 962 (2)
مجموع 2 بعد التوزيع	0	0	454 275

$$(1)\frac{1}{8}y = \frac{1}{8}.84\ 528 = 10\ 566$$

$$(2)\frac{7}{8}y = \frac{7}{8}.84\ 528 = 73\ 962$$

$$(3)\frac{1}{6}x = \frac{1}{6}.23\ 418 = 3\ 903$$

$$(4)\frac{5}{6}x = \frac{5}{6}.23\ 418 = 19\ 515$$

2- أ) الأرباح بين الإدارة والصيانة:

ليكن (التكاليف بعد توزيع النفقات الأولية المعروفة x التكلفة تلقى+الفوائد) لمركز الإدارة.

التكلفة هناك تكلفة (بعد توزيع النفقات الأولية المعروفة y ليكن تلقى + الفوائد) لمركز الصيانة

نظام المعادلات كما يلي:

$$\begin{cases} x = 16\ 530 + \ 0.1\ \ y\ \ (1) \\ y = 42\ 600 + \ 0.1\ x\ \ \ (2) \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} 10\,x = 165\,300 + y \quad (1) \\ -0.1\,x = 42\,600 - y \quad (2) \end{cases}$$

$$9.9\,x = 207\,900$$

$$x = 21\,000 \qquad y = 42\,600 + 6\,(0.1 \times 21\,000) = 44\,700$$

ب) جدول توزيع التكاليف غير المباشرة:

تكاليف غير المباشرة	المبلغ	مراكز المساعدة		المراكز الرئيسية			
		إدارة	صيانة	تموين	تصنيع	تركيب	توزيع
مجموع 1 التوزيع	204	16 530	42 600	35 630	58 290	40 800	10 550
إدارة	400	-21000	2100	2100	8 400	6 300	2 100
الصيانة		4 470	44 700	4 470	17 880	17 880	
مجموع 1 التوزيع				42200	84570	64980	12650
طبيعة وحدات العمل	204	0	0	كغ المادة المشتراة	كغ المادة المستعملة	ساعات اليد العاملة	100دج . من رقم الأعمال
عدد وحدات القياس	400			16800	14095	5415	5750
تكلفة وخدة القياس				2.5	6	12	2.2

ج) مختلف التكاليف والنتيجة:

للطلبية 512:

سعر الشراء للمواد الأولية: 1 250 كغ x 18 دج = 22 500

أعباء غير مباشرة للتموين: 1 250 كغ x 2.5 دج = **3 125**

تكلفة شراء المواد الأولية: 25 625

المباشرة للتصنيع 200 h x 36 دج = 7 200

أعباء غير المباشرة 1 250 كغ x 6 دج = **7 500**

تكلفة الإنتاج عند خروجه من ورشة التصنيع. 40 325

أعباء مباشرة للتركيب 420 h x 36 دج = 15 120

أعباء غير مباشرة للتركيب 420 h x 12 دج = **5 040**

تكلفة الإنتاج عند خروجه من ورشة التركيب: 60 485

أعباء توزيع الأعباء غير المباشرة: 600 x 2.2 = 1 320

سعر تكلفة: 61 805

– سعر البيع: 60 000

1 805 النتيجة (الخسارة).

المسألة السادسة:

أ)

1) إن التكلفة الحدية للإنتاج Cm(q) هو مشتق بالنسبة لـ q لتابع تكاليف المهمة: $C(q) = q^3 - 6q^2 + 24q$

نحصل على: $Cm(q) = C'(q) = 3q^2 - 12q + 24$

متوسط تكلفة الوحدة من الإنتاج:

$$Cu(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 6q + 24$$

2) **تابع متوسط تكلفة الوحدة:**

هو الحد الأدنى من أجل قيمة الإنتاج مثل: Q0 حيث:

$C'u(q) = 0$ و $C''u(q) > 0$

لكن $C'u(q) = 2q - 6 = 0$ وهدا يؤدي إلى $q = 3$ و $C''(q) = 2$

وبالتالي: $q = 3$

توسط الحد الأدنى المقرر من أجل: $q = 3$ ويبلغ:

$Cu(3) = 3^2 - 6.3 + 24 = 15$ وبما أن:

$$Cm(3) = 3.3^2 - 12.3 + 24 = 15, \quad on \quad a: \quad Cm(3) = Cu(3)$$

تبين عموما أن متوسط لتكلفة الوحدة هو الحد الأدنى عند تساوي التكلفة الحدية.

بما أن: Cu(q)، $C''u(q) = 2 > 0$

Cu(q) هو حد أدنى في الحالات التالية:

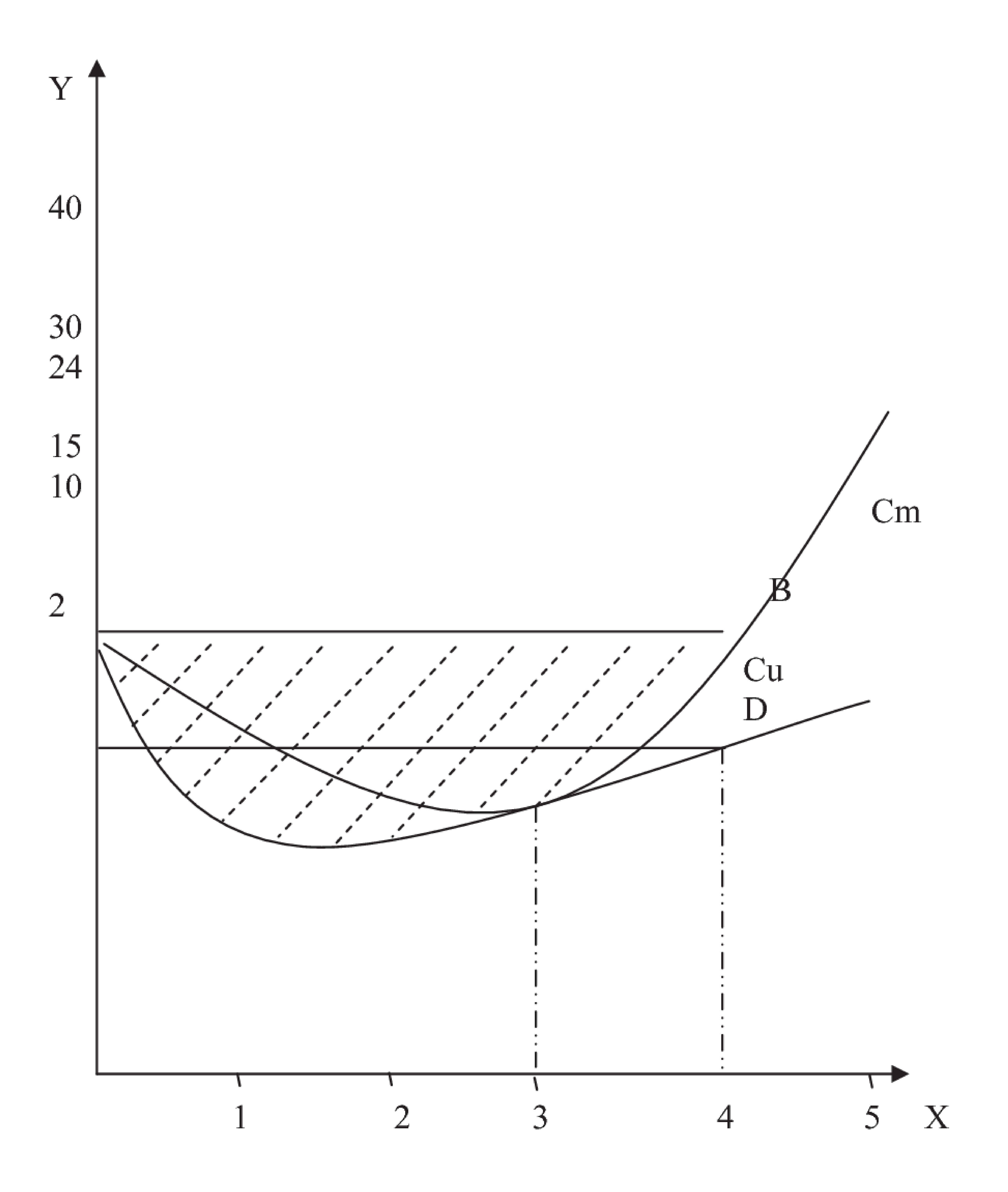
$C'u(q) = 0$ أو

أي:
$$\frac{qC'(q) - C(q)}{q^2} = 0$$

بما أن $q^2 > 0$: فان $C'u(q) = 0$ إذا كان:

$$qC'(q) - C(q) = 0 \quad ou \quad C'(q) = \frac{C(q)}{q}$$

أي: $Cm(q) = Cu(q)$



المنحنيان الاثنين

من الرسم البياني للتابع $q\rangle Cm(q)$ يقطع الرسم البياني للتابع $q\rangle Cu(q)$ عند $q0$ (هو حده الأدنى).

ب) 1) لنفترض أن المؤسسة موجودة في محيط تنافسي أمثل، سعر السوق (p=24) فهو يعتبر السعر المتوسط وفي آن واحد السعر الحدي.

بما أن Cu(q) السعر الوحدوي المتوسط و p سعر البيع؟، الربح الوحدوي المتوسط p=Cu(q)، هذا معناه أن الربح المحقق بإنتاج الكمية للسلعة A هي:

$$q(p-Cu(q)) \qquad (1)$$

فضلا عن التكلفة الحدية للكمية x للسلعة A هو Cm(x)، اذن سعر البيع الحدي هو P، الربح هو p - Cm(x) ، يترتب على ذلك أن الربح المحقق لإنتاج الكمية x للسلعة A هو:

$$\int_0^Q (p-Cm(x))dx \qquad (2)$$

2) بما أن p =24 و $Cu=\frac{C(q)}{q}=q^2-6q+24$

العلاقة (1) التي تعطي الربح تصبح:

$$B'(q)=q(p-Cu(q))=q(24-q^2+6q-24)=-q^3+6q^2$$

B(q) له حد أقصى اذا كان $B''(q) < 0$ و $B'(q)=0$

أي:

$$B'(q)=-3q^2+12q=-3q(q-4) \quad c'est \quad à \quad dire \quad B'(4)=0$$

بما أن: $B''(q)=-6q+12$

يستلزم:

$$B''(4)=-6.4+12=-12;$$

وبالتالي: $qM = 4$

لكن: $qm = 4$ ونتيجة لذلك، الإنتاج هو الذي يجعل الاستفادة القصوى.

ف = 4 ، أي أن يكون هامشيا في العنق لـ qm .

من أجل: $q = qM = 4$

$$Cm(4) = 3.4^2 - 12.4 + 24 = 24 = p$$

الإنتاج مساويا لسعر البيع عند استحقاق الحد الأقصى.

3)

من أجل: $q = qM$

$B(qM) = qM(p - Cu(qM))$ يمثل مساحة المستطيل ABDE

حيث ا لعرض هو

$AB = ED = qM$ والطول هو $EA = DB = p - Cu(qM)$

وبالمثل، ما يلي:

$$q = qM = \int_0^{qM} (p - Cm(z))dx$$

وتمثل المنطقة الواقعة بين الجانب أب والقوس أب في الرسم البياني لل حسب التكلفة الحدية (حاكتها في الشكل).

ج) 1) إذا كان سعر الوحدة للممتلكات ألف DA يتصل به قانون الطلب ف فان $P(q) = 32 - q$ للشركة عندما تنتج كمية جيدة من ألف ف:

$$B(q) = q(p(q) - Cu(q)) = q(32 - q - q^2 + 6q - 24) = q(-q^2 + 5q + 8)$$

أي:

$$B(q) = -q^3 + 5q^2 + 8q$$

2) المنتج B(q) هو الحد الأقصى عندما:

B'(q) = 0 و B''(q) ‹ 0

لكن لدينا: $B'(q) = -3q^2 + 10q + 8$

بما أن معين ثلاثي الحد من الدرجة الثانية:

$$-3q^2 + 10q + 8 = 0 \quad est \quad \Delta' = 5^2 + 24 = 49 = 7^2$$

والقيم التي تعدم B'(q) هي:

إلغاء باء (ف) هي:

$$q1 = \frac{-5-7}{-3} = 4 \quad et \quad q2 = \frac{-5-7}{-3} = \frac{-2}{3}$$

بما أن q يكون موجب ولدينا، B''(q) = - 6q + 10 سالب عندما q = 4
وينبغي أن تصدر الأمثل لتحقيق أقصى قدر من الربح عندما q = 4.

3) مرونة الطلب بالنسبة للسعر للتعبير عن:

$$Eq/p = \frac{dq}{dq}.\frac{p}{q}$$

بما أن p(q) = 32 – q فان:

$$q = 32 - p \text{ و } \frac{dq}{dq} = -1$$

وبالتالي قيمة المرونة:

$$Eq/p = -1.\frac{p}{q} = \frac{-p}{32-p} = \frac{p}{p-32}$$

4) ومجموع الإيرادات قد تعبير:

$$R(q) = p(q).q = (32-q)q = -q^2 + 32q;$$

سالب من أجل: 16 ‹ q ‹ 0

وموجب من أجل: 16 ‹ q

بما أن:

$$R'(q) = -2q + 32 = 2(16 - q)$$

فان(q)Rمجموع الإيرادات هو تابع:

متزايد عندما: 16 ‹ q ‹ 0

ومتناقص عندما: 16 ‹ q

وتبين أن إجمالي الإيرادات س (ف) مع زيادات ف إذا وفقط إذا مرونة $Eq/p\rangle 1$ في الواقع، إذ:

$$R'(q) = p'.q + p = \frac{dp}{dq}.q + p \quad ou \quad p \quad et \quad q \quad positifs \quad et \quad \frac{dp}{dq}\langle 0$$

بما أن p هو تابع متناقص لـ q .

عندما R'(q) موجبة فان R(q) تتزايد.

يعني عندما: $\frac{dp}{dq}.q + p\rangle 0 \quad ou \quad p\rangle -\frac{dp}{dq}.q;$

بما أن: $\frac{dp}{dq}.q\langle 0$

عندما نقسم طرفي المتراجحة، $p\rangle -\frac{dp}{dq}.q \quad par \quad \frac{dp}{dq}.q,$

نحصل على:

$$\frac{dp}{dq}.\frac{p}{q}\langle -1 \quad ou \quad Eq/p\langle -1$$

المراجع

ادمون، الرياضيات، تمارين محلولة مع تذكير بالدروس، ديوان المطبوعات الجامعية.

L. GUERBER، الجبر الخطي (1) Dalloz، باريس.

.Blanchard Olivier, Daniel Cohen, et Cyril Nouveau الإقتصاد الكلي

Editions Pearson Education, 2007.

.Court, H & Leurion J ، المحاسبة التحليلية والتسيير، Tome 1& 2 1998، Editions Foucher.

Goujet Christian, Christiane Raulet, Christian Raulet, المحاسبةالتحليلية ومراقبة التسيير. Tome 1 & 2, , Editions Dunod, 2002.

Raulet Christian, Raulet Christiane, Comptabilité analytique et contrôle de gestion, Tome 1 & 2,1997, Editions Dunod.

Saada Toudaik, Alain Burlaud, et Claude Simon, Comptabilité analytique et contrôle de gestion, Vuibert, 2005.

الفهرس

الفصل الثالث

نظم المعادلات من الدرجة الأولى ذات عدة مجهولة

الفصل الرابع

حساب التكاملات المحددة – الطرق المألوفة للتكامل-

أنجز طبعه على مطابع
ديوان المطبوعات الجامعية
1، الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر